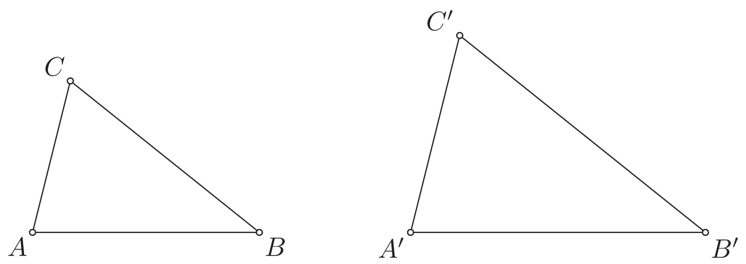
Дакле, важи $\mathcal{B}(P_c, A, P_b')$.

Праве S_bS_c и $P_b\bar{P}_c$ се секу у тачки A и из $S_bP_b \perp BC$ и $S_c\bar{P}_c \perp BC$ закључујемо да је $S_bP_b \parallel S_c\bar{P}_c$. Пошто важи $\mathcal{B}(S_b, A, S_c)$, из Талесове теореме следи да важи $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$ и $\frac{S_c\bar{P}_c}{S_bP_b} = \frac{AS_c}{AS_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$. Међутим, важи $S_bP_b = \rho_b$, па је $\frac{S_c\bar{P}_c}{\rho_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$, одакле закључујемо да је $S_c\bar{P}_c = \rho_c$, тј. $P_c' = \bar{P}_c$. Дакле, важи $\mathcal{B}(P_b, A, P_c')$.

Као што смо имали Ставове о подударности троуглова, постоје и Ставови о сличности троуглова. Што се тиче њихових формулација, имаћемо странице и углове, и то баш као код ставова о подударности (нпр. неке две и њима захваћен угао), с тим што имамо у виду да сличност чува *подударност углова* и *односе страница*.

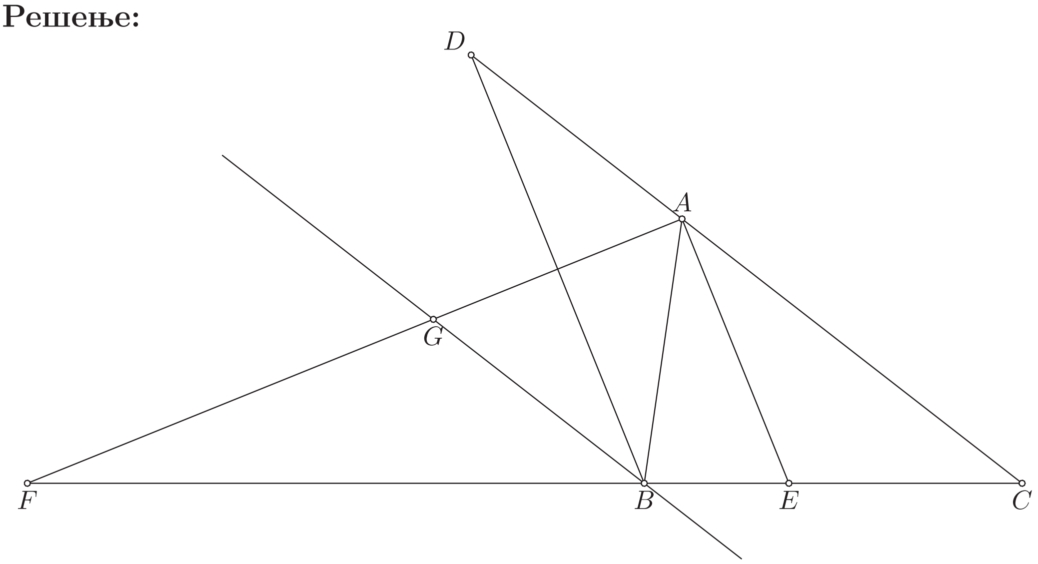
Став 2. *Нека су дати троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Ако важи нешто од следећег:*
1° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$;
2° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$;
3° $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$;
4° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, *а углови* $\measuredangle ABC$ *и* $\measuredangle A'B'C'$ *су оба оштра, оба права или оба тупа;*
онда је $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Сада прелазимо на задатке из сличности. Први задатак је Теорема о симетрали угла. Ова теорема је веома важна и треба је знати, јер ће се користити и у даљим задацима (нпр. као што се средња линија користи у многим другим задацима).

1. (**Теорема о симетрали угла**) Ако су E и F тачке у којима бисектрисе унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ ($AB < AC$) секу праву BC доказати $BE : CE = BF : CF = AB : AC$.

Решење:



Идеја је да применимо Талесову теорему. Да бисмо пронашли колики је однос $BE : CE$, довољно је да нађемо колики је однос $CE : EB$, па потражимо на полуправој CA тачку D такву да важи $\mathcal{B}(C, A, D)$ и $AD = AB$. Уколико докажемо да је $DB \parallel AE$, према Талесовој теореми ће бити $CE : EB = CA : AD$, па ће одатле следити $BE : CE = AD : AC$. Како је $AD = AB$, добићемо да је $BE : CE = AB : AC$, а то и треба доказати.

Уколико докажемо да је $\measuredangle BDA = \measuredangle EAC = \frac{\alpha}{2}$, следиће да су то углови с паралелним крацима, па ће бити $DB \parallel AE$. Како је $AD = AB$, следи да је троугао $\triangle ADB$ једнакокрак, па је $\measuredangle BDA = \measuredangle DBA$. Означимо те углове са φ. Угао $\measuredangle BAC = \alpha$ је спољашњи угао троугла $\triangle ADB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle BDA = \varphi$ и $\measuredangle DBA = \varphi$. Дакле, $\alpha = \varphi + \varphi = 2\varphi$, па је $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Дакле, доказали смо да је $\measuredangle BDA = \frac{\alpha}{2}$, па је $DB \parallel AE$, а одатле следи да је $BE : CE = AB : AC$.

Сада желимо да нађемо однос $BF : CF = FB : FC$, па уочимо праву која садржи B и паралелна је са правом AC. Означимо са G њен пресек са правом FA. Талесова теорема нам тада даје да је $FB : FC = BG : CA$, па је довољно доказати да је $BG = AB$. Права AG је симетрала угла $\measuredangle BAD = \pi - \alpha$ (то је спољашњи угао код темена A троугла $\triangle ABC$), па је $\measuredangle GAB = \frac{\pi-\alpha}{2}$. Из $BG \parallel AC$ закључујемо да су углови $\measuredangle GBA$ и $\measuredangle BAC = \alpha$ углови с паралелним крацима, па су они подударни. Дакле,

$\measuredangle GBA = \alpha$. Одавде је $\measuredangle BGA = \pi - \measuredangle GBA - \measuredangle GAB = \pi - \alpha - \frac{\pi-\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}$, па је $\measuredangle BGA = \measuredangle GAB$. Дакле, троугао $\triangle BAG$ је једнакокраки, па је $BG = BA$. Овим је доказ завршен, јер је сада $BF : CF = BG : AC = AB : AC$, што је и требало доказати.

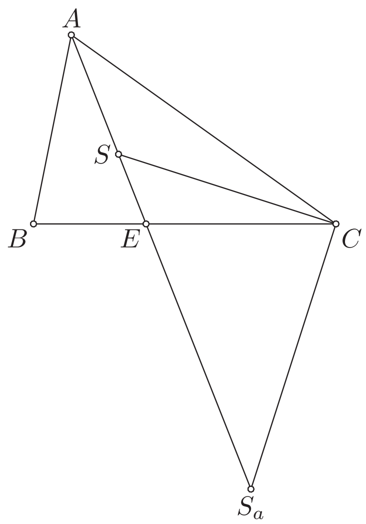
Видимо да је понекад потребно „доцртати” неке тачке и праве да би се лакше дошло до решења задатка. Овде су тачка D и права BG добијене у жељи да се искористи Талесова теорема.

2. Нека су E и F тачке из претходног задатка. Доказати:

- **а)** $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;
- **б)** $AE : SE = (AB+AC+BC) : BC$, $AE : S_aE = (AB+AC-BC) : BC$;
- **в)** $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

Решење: Овде су тачке E, F из 1. задатка, а тачке S, S_a, S_b, S_c су тачке из Великог задатка, дакле центри редом уписаног круга k и споља уписаних кругова k_a, k_b, k_c.

а)



Применом Теореме о симетрали угла (1. задатка) на троугао $\triangle CAE$ закључујемо да је $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE$. Такође, знамо да је $BE : CE = AB : AC$ (1. задатак), па је $AC : CE = AB : BE$. Означимо тај однос са λ, дакле нека је $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BE} = \lambda$. Одавде је $AC = \lambda CE$ и $AB = \lambda BE$, па је $AB + AC = \lambda(BE + CE) = \lambda BC$. Следи да је $\lambda = (AB + AC) : BC$, а како је $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE = \lambda$, следи да је $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$.

б) Како је $AE = AS + SE$, дељењем са SE добијамо да је

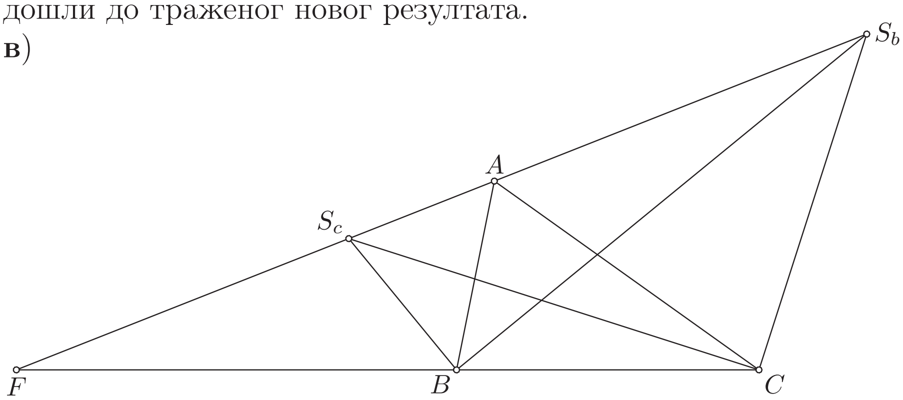
$$\begin{aligned}\frac{AE}{SE} &= \frac{AS+SE}{SE} = \frac{AS}{SE} + \frac{SE}{SE}\\ &= \frac{AS}{SE} + 1 = \frac{AB+AC}{BC} + 1\\ &= \frac{AB+AC}{BC} + \frac{BC}{BC} = \frac{AB+AC+BC}{BC}.\end{aligned}$$

Слично, како је $AE = AS_a - S_aE$, дељењем са S_aE добијамо да је

$$\begin{aligned}\frac{AE}{S_aE} &= \frac{AS_a - S_aE}{S_aE} = \frac{AS_a}{S_aE} - \frac{S_aE}{S_aE}\\ &= \frac{AS_a}{S_aE} - 1 = \frac{AB+AC}{BC} - 1\\ &= \frac{AB+AC}{BC} - \frac{BC}{BC} = \frac{AB+AC-BC}{BC}.\end{aligned}$$

Овде смо само користили претходне резултате и уз мало рачунања дошли до траженог новог резултата.

в)



Применом Теореме о симетрали угла на троугао $\triangle BAF$ добијамо да је $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AB : BF$. Такође, применом те теореме на троугао $\triangle CAF$ добијамо да је $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AC : CF$. Означимо тражени непознати однос са λ, дакле $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = \lambda$. На основу добијених резултата имамо да је $AB : BF = AC : CF = \lambda$. Одавде следи да је $AB = \lambda BF$ и $AC = \lambda CF$, па одузимањем добијамо да је $AC - AB = \lambda(CF - BF) = \lambda BC$. Дакле, $\lambda = (AC - AB) : BC$, па следи тражени резултат $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

3. Доказати (важе ознаке из великог задатка):

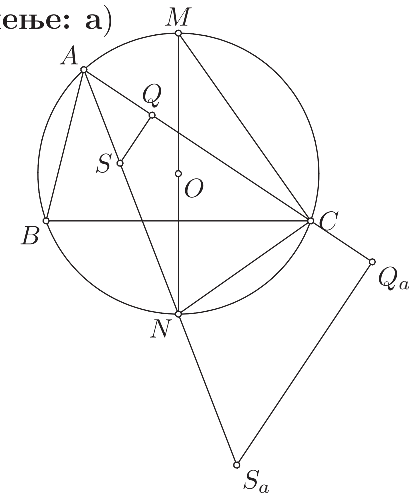
а) $SA \cdot SN = 2r\rho$;

б) $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$;

в) $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$;

г) $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.

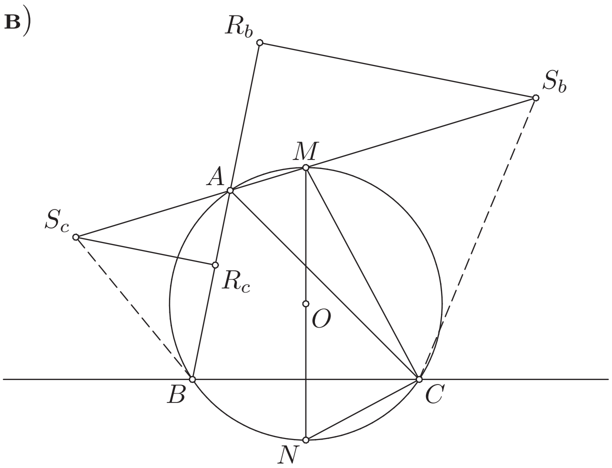
Решење: а)



Сличност даје односе, а не производе дужи, али можемо те односе помножити дужима које су у имениоцима и доћи до производа. Како нам се јавља полупречник уписаног круга, морамо уочити подножје нормале из центра S уписаног круга на некој од страница троугла $\triangle ABC$, нпр. подножје Q на страници AC. Пошто нам се јавља $2r$, тј. пречник описаног круга, и пошто већ имамо тачку N, уочимо тачку M из Великог задатка, јер тада имамо пречник $MN = 2r$.

Сада имамо да је $\measuredangle SAQ = \measuredangle NAC = \measuredangle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\measuredangle SQA$ и $\measuredangle NCM$ прави ($\measuredangle NMC$ је периферијски над пречником NM), па је $\measuredangle SQA = \measuredangle NCM$. Следи да је $\triangle ASQ \sim \triangle MNC$, па је $SA : NM = SQ : NC$. Множењем са NM и NC добијамо да је $SA \cdot NC = NM \cdot SQ$. Како је $NM = 2r$, $SQ = \rho$ и $NC = SN$ (Велики задатак, став **6)**), следи да је $SA \cdot SN = 2r\rho$, што је и требало доказати.
б) Слично као у делу **а)**, уочимо тачке M, Q_a из Великог задатка. Имамо да је $\measuredangle S_aAQ_a = \measuredangle NAC = \measuredangle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\measuredangle S_aQ_aA$ и $\measuredangle NCM$ прави, па је $\measuredangle S_aQ_aA = \measuredangle NCM$. Следи да је $\triangle AS_aQ_a \sim \triangle MNC$, па је $S_aA : NM = S_aQ_a : NC$, односно, после множења, $S_aA \cdot NC = NM \cdot S_aQ_a$. Заменом $NM = 2r$, $S_aQ_a = \rho_a$ и $NC = S_aN$ (Велики задатак, став **6)**) добијамо $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$.

в)

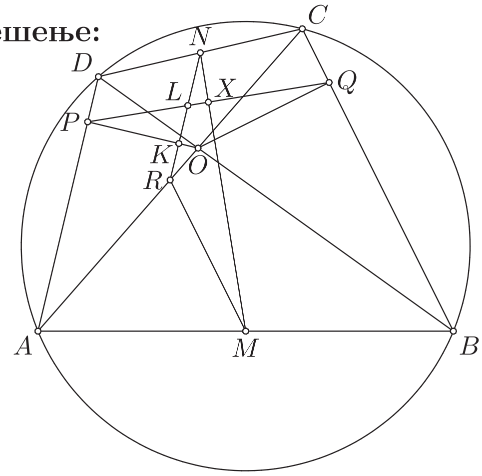


Како нам се овде јавља ρ_b, уочимо подножје нормале из S_b на некој од страница троугла $\triangle ABC$, нпр. на страници AB (дакле, тачку R_b) и како се поново јавља пречник описаног круга $2r$, уочимо пречник MN. Углови $\measuredangle MNC$ и $\measuredangle MAC$ су периферијски над луком $\widehat{MC}$, па су подударни, дакле $\measuredangle MNC = \measuredangle MAC = \frac{\pi-\alpha}{2}$ (права AM је симетрала спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$). Такође, $\measuredangle S_bAR_b = \frac{\pi-\alpha}{2}$, па је $\measuredangle MNC = \measuredangle S_bAR_b$. Важи и $\measuredangle MCN = \frac{\pi}{2} = \measuredangle S_bR_bA$, па следи да је $\triangle MNC \sim \triangle S_bAR_b$. Дакле, $S_bA : MN = S_bR_b : MC$, односно $S_bA \cdot MC = MN \cdot S_bR_b$. Заменом $MN = 2r$, $S_bR_b = \rho_b$ и $MC = S_bM$ (Велики задатак, став **6)**) добијамо $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$.

г) Слично као у делу **в)**, уочимо тачке M, R_c из Великог задатка. Имамо да је $\measuredangle S_cAR_c = \frac{\pi-\alpha}{2} = \measuredangle MAC = \measuredangle MNC$ (прве две једнакости важе јер је S_cM симетрала спољашњег угла код темена A, а последња јер су то периферијски углови над луком $\widehat{MC}$), као и $\measuredangle S_cR_cA = \frac{\pi}{2} = \measuredangle MCN$, па је $\triangle S_cAR_c \sim \triangle MNC$. Следи $S_cA : MN = S_cR_c : MC$, односно $S_cA \cdot MC = MN \cdot S_cR_c$. Заменом $MN = 2r$, $S_cR_c = \rho_c$ и $MC = S_cM$ (Велики задатак, став **6)**) добијамо $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.

4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, M и N редом средишта страница AB и CD, O пресек дијагонала AC и BD, а P и Q нормалне пројекције тачке O редом на AD и BC. Доказати да је $MN \perp PQ$.

Решење:



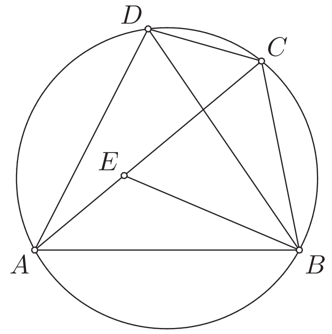
Нека је R средиште дијагонале AC. Тада је RM средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $RM \parallel BC$ и $RM = \frac{1}{2}BC$, а RN је средња линија троугла $\triangle ACD$, па је $RN \parallel AD$ и $RN = \frac{1}{2}AD$. Даље, како је $OQ \perp BC$ и $OP \perp AD$, следи да је $RM \perp OQ$ и $RN \perp OP$, па је $\measuredangle MRN = \measuredangle QOP$ (углови с нормалним крацима). Поред тога имамо да је $\frac{MR}{RN} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AD} = \frac{BC}{AD}$, па је довољно да докажемо да је $OQ : OP = BC : AD$ да би следило да је $\triangle MRN \sim \triangle QOP$.

Троуглови $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ су слични, јер имају подударне углове. Заиста, $\measuredangle AOD = \measuredangle BOC$ јер су то унакрсни углови и $\measuredangle ADO = \measuredangle BCO$ (периферијски над луком $\overset{\frown}{AB}$). Код сличних троуглова висине се односе исто као и странице, па је $OQ : OP = BC : AD$ (OQ је висина троугла BOC, а OP је висина троугла AOD). Дакле, $MR : RN = BC : AD = QO : OP$ и $\measuredangle MRN = \measuredangle QOP$, па је $\triangle MRN \sim \triangle QOP$. Следи да је $\measuredangle RNM = \measuredangle OPQ$ и $\measuredangle RMN = \measuredangle OQP$.

Означимо са K, L редом пресечне тачке праве RN са правима OP и QP и означимо са X пресечну тачку праве MN и праве PQ. Углови $\measuredangle KPL$ и $\measuredangle XNL$ су међусобно подударни, јер је $\measuredangle KPL = \measuredangle OPQ$ и $\measuredangle XNL = \measuredangle MNR$, а $\measuredangle OPQ = \measuredangle MNR$. Такође, $\measuredangle KLP = \measuredangle XLN$, јер су то унакрсни углови. Следи да троуглови $\triangle PKL$ и $\triangle NXL$ имају подударне углове, па је $\measuredangle LXN = \measuredangle LKP$. Међутим, $\measuredangle LKP = \frac{\pi}{2}$, јер је то угао између праве NR и праве OP, а важи $NR \perp OP$. Према томе, $\measuredangle LXN = \frac{\pi}{2}$, а то је угао између праве PQ и праве MN, па закључујемо да је $MN \perp PQ$.

5. Птоломејева теорема. Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четвороугао, доказати да важи $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Доказ:



Идеја је да производ $AC \cdot BD$ напишемо као збир два сабирка, од којих ће један бити једнак са $AB \cdot CD$, а други са $AD \cdot BC$. Ако на дијагонали AC уочимо неку тачку E, онда је $AC = AE + EC$, па је $AC \cdot BD = (AE+EC) \cdot BD = AE \cdot BD + EC \cdot BD$. Треба погодно одабрати тачку E тако да нпр. буде $AE \cdot BD = AB \cdot CD$ и $EC \cdot BD = AD \cdot BC$, односно $AE : CD = AB : BD$ и $EC : AD = BC : BD$. Зато узмимо тачку E на дијагонали AC такву да је $\measuredangle ABE = \measuredangle DBC$.

Како је $\measuredangle BAE = \measuredangle BDC$ (периферијски над $\overset{\frown}{BC}$) и $\measuredangle ABE = \measuredangle DBC$, следи да је $\triangle ABE \sim \triangle DBC$, па је $AE : DC = AB : DB$. Дакле, важи $AE \cdot BD = AB \cdot CD$. Даље, имамо да је $\measuredangle ECB = \measuredangle ADB$ (периферијски над $\overset{\frown}{AB}$) и $\measuredangle EBC = \measuredangle EBD + \measuredangle DBC = \measuredangle EBD + \measuredangle ABE = \measuredangle ABD$, па је $\triangle EBC \sim \triangle ABD$. Следи да је $EC : AD = BC : BD$, па добијамо $EC \cdot BD = AD \cdot BC$. Сабирањем добијамо да је

$$\begin{aligned} AE \cdot BD + EC \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ (AE + EC) \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ AC \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. $\square$

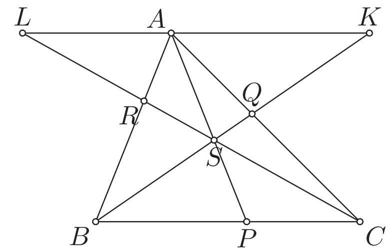
Дефиниција 14. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија правих неке равни. Ако
1) постоји тачка S која припада свим правима фамилије $\mathcal{F}$ и све праве које садрже тачку S припадају фамилији $\mathcal{F}$;
2) постоји права s која је паралелна свим правима фамилије $\mathcal{F}$ и све праве које су паралелне правој s припадају фамилији $\mathcal{F}$;
онда такву фамилију $\mathcal{F}$ зовемо *праменом правих*. Ако прамен $\mathcal{F}$ задовољава услов 1), кажемо да је то прамен *конкурентних* правих, а ако прамен $\mathcal{F}$ задовољава услов 2), кажемо да је то прамен *паралелних* правих.

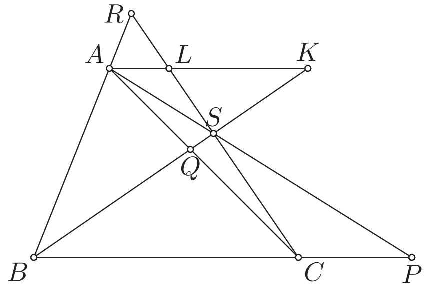
Чевина теорема. Ако су P, Q, R редом тачке правих BC, CA, AB где су A, B, C три неколинеарне тачке, тада праве AP, BQ, CR припадају једном прамену ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$.

Доказ: Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. У формулацији теореме требало би додати услов да се тачке P, Q, R разликују од темена A, B, C троугла $\triangle ABC$, јер иначе број Π или није добро дефинисан (ако је нпр. $P = C$, онда није дефинисано $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$), или је једнак 0 (ако је нпр. $P = B$).

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека су AP, BQ, CR праве једног прамена.

1°





Нека је S заједничка пресечна тачка правих AP, BQ, CR и нека су K, L редом пресечне тачке правих BQ, CR са правом која садржи тачку A и паралелна је са BC. Тада је на основу Талесове теореме

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{KA}{AL} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{KA} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AL}{CB}, \end{aligned}$$

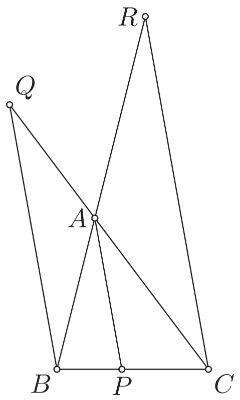
па добијамо да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{KA}{AL} \cdot \frac{CB}{KA} \cdot \frac{AL}{CB} = 1.$$

Ако је тачка S у унутрашњости троугла $\triangle ABC$, онда тачке P, Q, R припадају редом *дужима* BC, CA, AB, па је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$. Дакле, тада је $\Pi > 0$. Тачка S не може припадати ни правој AB, ни правој AC, нити правој BC, јер ће тада нека од тачака P, Q, R бити теме троугла. Према томе, тачка S не припада троуглу $\triangle ABC$, па остаје још случај када је у спољашњости троугла $\triangle ABC$ (и, наравно, не припада ни правој AB, ни правој AC нити правој BC). Тада ће тачно једна од тачака P, Q, R припадати одговарајућој дужи (BC, AC, AB). Нпр. нека тачка Q припада дужи AC, као што је на слици. Тада је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$

и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је поново $\Pi > 0$. Слично добијамо да је $\Pi > 0$ и у преостала два случаја (P припада дужи BC, односно R припада дужи AB). Дакле, имамо $\Pi > 0$ и $|\Pi| = 1$, па следи да је $\Pi = 1$.

2°



Нека су праве AP, BQ, CR међусобно паралелне. На основу Талесове теореме је

$$\begin{aligned}\frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{BP}\\ \frac{AR}{RB} &= \frac{PC}{CB},\end{aligned}$$

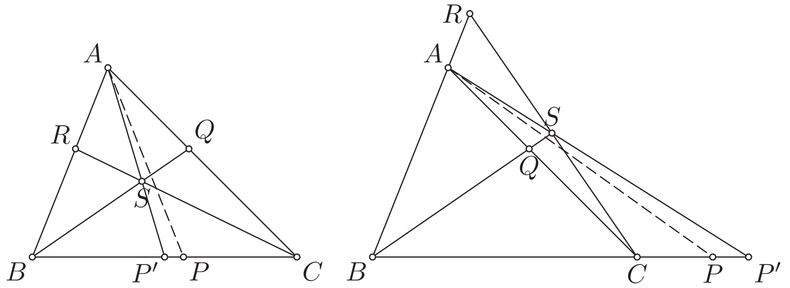
па је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CB}{BP} \cdot \frac{PC}{CB} = 1.$$

Праве AP, BQ, CR морају бити такве та тачно две од њих не пролазе кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, а трећа пролази. Стога тачно две од тачака P, Q, R припадају дужима BC, CA, AB, а трећа не припада. Нпр. ако права AP пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, онда праве BQ, CR не пролазе кроз унутрашњост троугла и тачка P припада дужи BC, а тачке Q, R не припадају дужима CA, AR. Следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је $\Pi > 0$. Слично и у преостала два случаја (права BQ пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, односно права CR пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$) добијамо да је $\Pi > 0$. Дакле, важи $\Pi > 0$ и $|\Pi| = 1$, па закључујемо да је $\Pi = 1$.

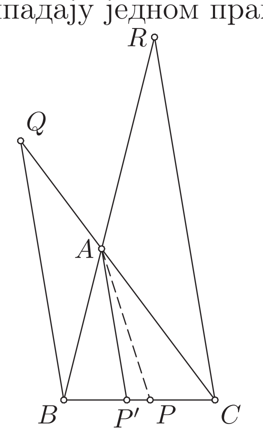
$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $\Pi = 1$. Посматрајмо праве BQ и CR.

1°



Нека се праве BQ и CR секу у тачки S. Означимо са P' пресечну тачку праве AS и праве BC. На основу дела $\boxed{\Longrightarrow}$ следи $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Такође, по претпоставци је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$, па је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па се праве AP, BQ, CR секу у тачки S. Дакле, AP, BQ, CR припадају једном прамену.

2°



Нека је $BQ \parallel CR$. Означимо са P' пресечну тачку праве која садржи тачку A и паралелна је са правом BQ (и правом CR) и праве BC. На основу дела $\boxed{\Longrightarrow}$ следи $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Такође, $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$, па је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па су праве AP, BQ, CR паралелне. Дакле, праве AP, BQ, CR припадају једном прамену. $\square$

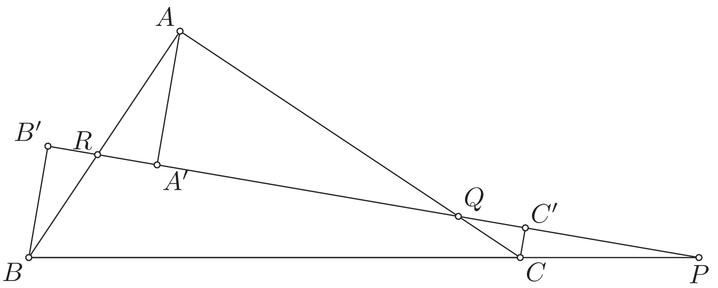
Менелајева теорема. Тачке P, Q, R правих одређених страницама BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$ су колинеарне ако и само ако важи

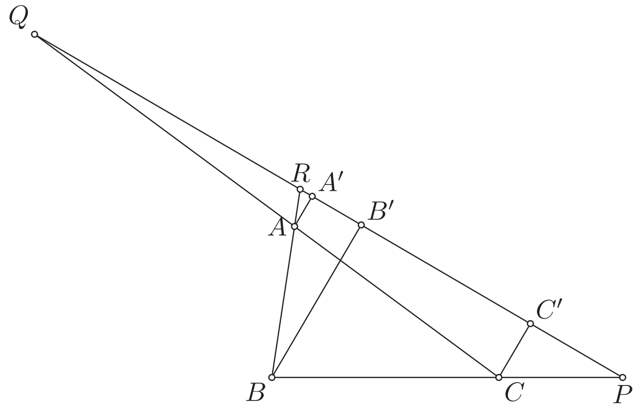
$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$$

.

Доказ: Означимо поново $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Слично као код формулације Чевине теореме, и у формулацији ове теореме требало би додати услов да се тачке P, Q, R разликују од темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ (из истих разлога као малопре, јер ће број Π бити недефинисан ако је нпр. $P = C$ или ће бити једнак нули ако је нпр. $P = B$).

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека су P, Q, R колинеарне и нека је p права која их садржи. Означимо са A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој p. Тада су праве AA', BB', CC' паралелне, па на основу Талесове теореме имамо:





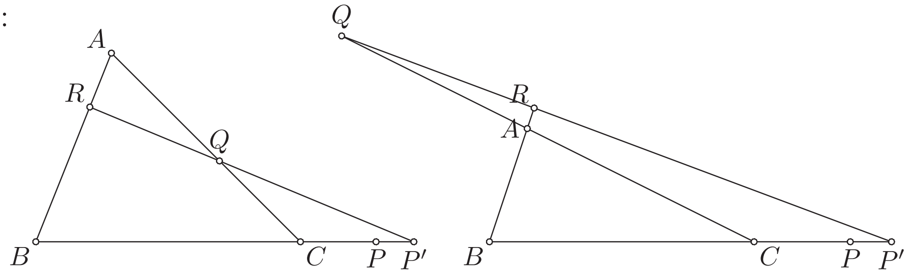
$$\begin{aligned}\frac{BP}{PC} &= \frac{BB'}{CC'}\\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CC'}{AA'}\\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AA'}{BB'}.\end{aligned}$$

Следи да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{BB'} = 1.$$

Како права p не садржи ниједно теме троугла A, B, C јер би иначе нека од тачака P, Q, R била теме троугла, на основу Пашове аксиоме закључујемо да или тачно две од тачака P, Q, R припадају одговарајућим дужима BC, CA, AB или ниједна од њих не припада одговарајућој дужи. Ако нпр. тачке Q, R припадају редом дужима CA, AB, важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$, па је $\Pi < 0$. Слично, ако тачке P, Q припадају редом дужима BC, CA или ако тачке P, R припадају редом дужима BC, AB, следи да је $\Pi < 0$. Ако ниједна од тачака P, Q, R не припада одговарајућој дужи (BC, CA, AB), важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је поново $\Pi < 0$. Закључујемо да је $\Pi < 0$ и $|\Pi| = 1$, па је $\Pi = -1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$:



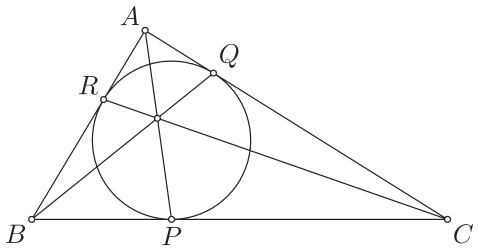
Нека је $\Pi = -1$. Означимо са P' пресечну тачку праве QR и праве BC. На основу дела $\boxed{\Longrightarrow}$ следи да је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$. Такође, по претпоставци је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$, па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па су тачке P, Q, R колинеарне. $\square$

Напомена 5. Да би докази смерова $\boxed{\Longleftarrow}$ Чевине и Менелајеве теореме били до краја коректни, морали бисмо да докажемо да тачке P' постоје, тј. у случају 1° Чевине теореме да AS и BC нису паралелне, у случају 2° Чевине теореме да права која садржи A и паралелна је са BQ и CR није паралелна са BC, а у Менелајевој теореми да праве QR и BC нису паралелне. Међутим, то овде нећемо радити.

Напомена 6. У некој литератури се уместо израза „Чевина теорема" може наћи и израз „Чеваова теорема".

6. Ако су P, Q, R тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB, доказати да су праве AP, BQ, CR конкурентне.

Решење:



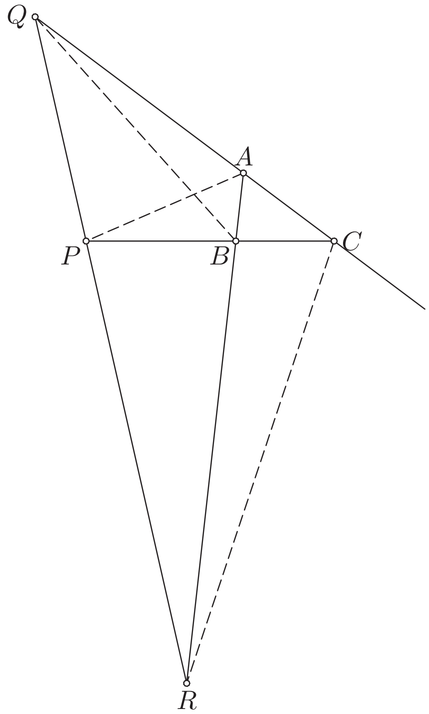
Нека је $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Тангентне дужи из тачака A, B, C на уписаном кругу троугла $\triangle ABC$ су подударне ($AQ = AR$, $BR = BP$, $CP = CQ$), па следи да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BR}{PC} \cdot \frac{CP}{QA} \cdot \frac{AQ}{RB} = 1.$$

Тачке P, Q, R припадају дужима BC, CA, AB, па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QB}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$. Одавде закључујемо да је $\Pi > 0$, па због $|\Pi| = 1$ следи да је $\Pi = 1$. На основу Чевине теореме закључујемо да праве AP, BQ, CR припадају једном прамену. С обзиром на то да дужи BQ, CR припадају унутрашњости троугла $\triangle ABC$, оне се секу, па закључујемо да праве AP, BQ, CR припадају прамену конкурентних правих, тј. оне су конкурентне (секу се у једној тачки).

7. Доказати да уколико постоје тачке у којима бисектрисе спољашњих углова код темена A, B, C секу праве одређене наспрамним страницама троугла ABC, оне су колинеарне.

Решење:



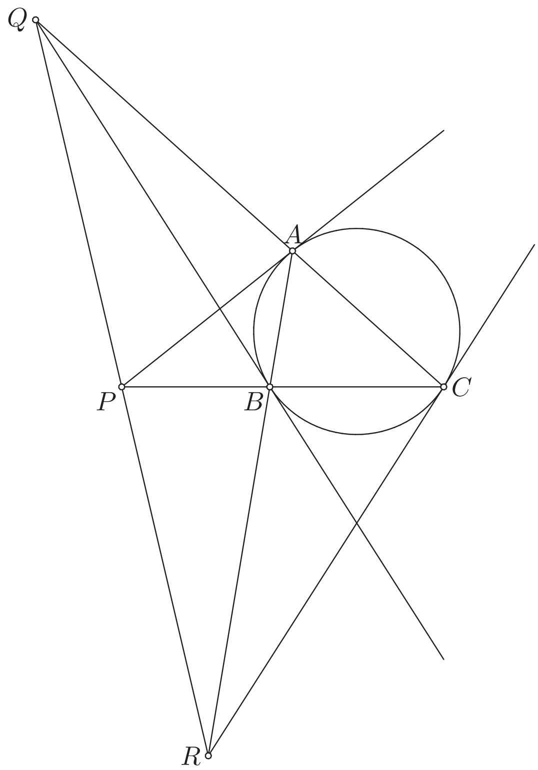
Нека су P, Q, R редом пресечне тачке симетрала спољашњих углова код темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ са правима BC, CA, AB. Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. На основу Теореме о симетрали угла следи да је

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{AB}{AC} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{BA} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AC}{CB}, \end{aligned}$$

па је $|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} \cdot \frac{AC}{CB} = 1$. Како симетрале спољашњих углова троугла припадају спољашњости троугла, следи да ниједна од тачака P, Q, R не припада одговарајућој дужи (BC, CA, AB), па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$. Дакле, $\Pi < 0$ и $|\Pi| = 1$, па је $\Pi = -1$. На основу Менелајеве теореме следи да су тачке P, Q, R колинеарне.

8. Доказати да тачке P, Q, R у којима тангенте описаног круга троугла ABC у његовим теменима секу праве одређене наспрамним страницама, уколико постоје, припадају једној правој.

Решење:



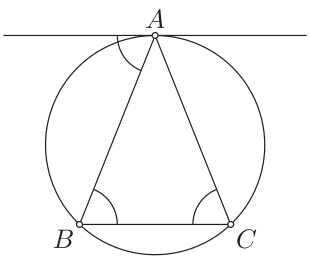
Нека су P, Q, R редом пресечне тачке тангенти у теменима A, B, C троугла $\triangle ABC$ на његовом описаном кругу са правима BC, CA, AB. Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Угао $\measuredangle PAB$ је угао између тангенте PA и тетиве AB, па је подударан с периферијским углом $\measuredangle ACB$ над том тетивом. Следи да је $\measuredangle PAB = \measuredangle PCA (= \measuredangle BCA)$, а како је и $\measuredangle APB = \measuredangle CPA$ (исти угао), следи да је $\triangle PAB \sim \triangle PCA$. Одавде је $\frac{BP}{AP} = \frac{PA}{PC} = \frac{AB}{AC}$, па следи да је $\frac{BP}{PC} = \frac{BP}{AP} \cdot \frac{AP}{PC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Слично, $\measuredangle QBA = \measuredangle ACB$ (угао $\measuredangle QBA$ између тангенте QB и тетиве BA подударан је с периферијским углом $\measuredangle ACB$ над том тетивом) и $\measuredangle BQA = \measuredangle BQC$ (исти угао), па је $\triangle QBC \sim \triangle QAB$. Следи $\frac{CQ}{BQ} = \frac{QB}{QA} = \frac{BC}{AB}$, па је $\frac{CQ}{QA} = \frac{CQ}{BQ} \cdot \frac{BQ}{QA} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$. Коначно, $\measuredangle RCB = \measuredangle BAC$ (угао $\measuredangle RCB$ између тангенте RC и тетиве CB подударан је с периферијским углом $\measuredangle BAC$ над том тетивом) и $\measuredangle BRC = \measuredangle ARC$ (исти угао), па је $\triangle RAC \sim \triangle RCB$. Следи да је

$\frac{AR}{CR} = \frac{RC}{RB} = \frac{AC}{CB}$, па је $\frac{AR}{RB} = \frac{AR}{CR} \cdot \frac{CR}{RB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$. Према томе,

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \cdot \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1.$$

Како тангенте AP, BQ, CR припадају спољашњости описаног круга троугла $\triangle ABC$, следи да оне припадају и спољашњости троугла $\triangle ABC$, па тачке P, Q, R не припадају одговарајућим дужима BC, CA, AB. Према томе, $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је и $\Pi < 0$. Дакле, $\Pi = -1$, па према Менелајевој теореми следи да су тачке P, Q, R колинеарне.

Напомена 7. Размотримо у ком случају је нека од тангенти паралелна са наспрамном страницом, нпр. када је тангента у темену A троугла $\triangle ABC$ на његовом описаном кругу паралелна са BC.



Назначени угао између тангенте и тетиве AB подударан је с периферијским углом $\measuredangle ACB$ над том тетивом, а с друге стране подударан је с углом $\measuredangle ABC$, јер су то углови с паралелним крацима. Закључујемо да је $\measuredangle ACB = \measuredangle ABC$, па је троугао $\triangle ABC$ једнакокраки с основицом BC. Дакле, задатак се могао решавати само за троуглове $\triangle ABC$ који нису једнакокраки, јер иначе не постоји нека од тачака P, Q, R.

Дефиниција 15. Нека су P, Q, R, S четири различите колинеарне тачке. Пар тачака (P, Q) је *хармонијски спрегнут* с паром тачака (R, S) ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$ и пишемо $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Следе неке особине релације хармонијске спрегнутости. Најпре, та релација је симетрична у следећем смислу. Ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\mathcal{H}(P, Q; S, R)$, $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$, $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$, односно небитан је да ли је у питању пар (P, Q) или пар (Q, P), као и да ли је у питању пар (R, S) или пар (S, R). Такође, ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$, тј. ако је пар (P, Q) хармонијски спрегнут с паром (R, S), онда је и пар (R, S) хармонијски спрегнут с паром (P, Q). Докажимо ове особине.

Ако је $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$, онда је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Заменом места разломцима на левој и десној страни једнакости добијамо $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = -\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$, што по дефиницији даје $\mathcal{H}(P,Q;S,R)$. Множењем бројилаца и именилаца с леве и десне стране једнакости бројем -1 добијамо да је $\frac{-\overrightarrow{PS}}{-\overrightarrow{SQ}} = -\frac{-\overrightarrow{PR}}{-\overrightarrow{RQ}}$, односно да је $\frac{\overrightarrow{SP}}{\overrightarrow{QS}} = -\frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{QR}}$. Како су тачке P,Q,R,S међусобно различите, ниједан од ових вектора није нула вектор, па ни бројеви с леве и десне стране једнакости нису једнаки 0, што значи да можемо узети њихове инверзе и они ће такође бити једнаки. Добијамо да је $\frac{\overrightarrow{QS}}{\overrightarrow{SP}} = -\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{RP}}$, а то по дефиницији значи да је $\mathcal{H}(Q,P;S,R)$. Поновном заменом места разломцима на левој и десној страни једнакости добијамо $\mathcal{H}(Q,P;R,S)$.

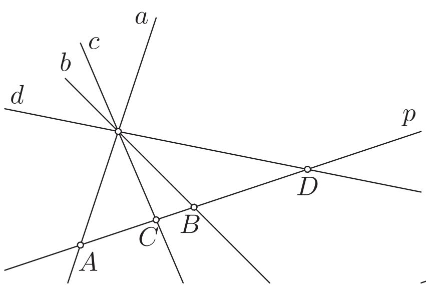
Ако је $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$, онда је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = \lambda$. Следи да је $\overrightarrow{PR} = \lambda\overrightarrow{RQ}$ и $\overrightarrow{PS} = -\lambda\overrightarrow{SQ} = \lambda\overrightarrow{QS}$. Вектори $\overrightarrow{RP}$ и $\overrightarrow{PS}$ су колинеарни и ниједан од њих није нула вектор, па следи да је $\lambda \neq 0$ и постоји однос тих вектора који је једнак $\frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{PS}} = \frac{-\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PS}} = \frac{-\lambda\overrightarrow{RQ}}{\lambda\overrightarrow{QS}} = -\frac{\overrightarrow{RQ}}{\overrightarrow{QS}}$. Следи да је $\mathcal{H}(R,S;P,Q)$.

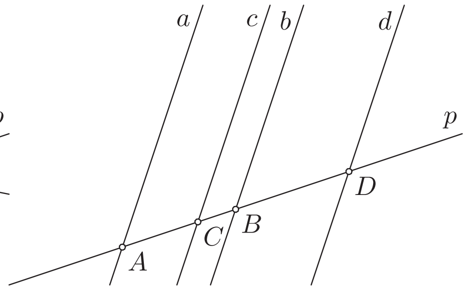
Даље, ако су P,Q,R три разне колинеарне тачке и R није средиште дужи PQ, тада постоји јединствена тачка S таква да је $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$. Заиста, тада је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \notin \{0,1\}$, па постоји јединствена тачка S таква да је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = -\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$ (због $-\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \neq -1$ следе постојање и јединственост тачке S). Због $-\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \neq 0$ следи да је S различита од P, а наравно мора бити и $S \neq Q$ и $S \neq R$, па је заиста $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$.

Ако је $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$, онда важи тачно један од распореда тачака $\mathcal{B}(P,R,Q)$ и $\mathcal{B}(P,S,Q)$. Заиста, из $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$ следи $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = \lambda$. Како због различитости тачака P,Q,R,S важи $\lambda \neq 0$, следи да је тачно један од односа $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$ и $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$ позитиван (други је наравно негативан). Ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} > 0$, онда је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} < 0$, па важи $\mathcal{B}(P,R,Q)$ и не важи $\mathcal{B}(P,S,Q)$. Ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} < 0$, онда је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} > 0$, па важи $\mathcal{B}(P,S,Q)$ и не важи $\mathcal{B}(P,R,Q)$. Према томе, важи тачно један од распореда тачака $\mathcal{B}(P,R,Q)$ и $\mathcal{B}(P,S,Q)$.

Дефинисаћемо и хармонијску спрегнутост парова правих.

Дефиниција 16. Нека праве a,b,c,d припадају једном прамену. Кажемо да је пар (a,b) *хармонијски спрегнут* с паром (c,d) ако постоји права p таква да је $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B\}$, $p \cap c = \{C\}$, $p \cap d = \{D\}$ и важи $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. Тада пишемо $\mathcal{H}(a,b;c,d)$.





Да би дефиниција била коректна, требало би доказати да ова особина не зависи од избора праве p. То нећемо радити. Навешћемо само једну особину без доказа. Ако су a, b, c, d праве конкурентног прамена (конкурентне праве) и $c \perp d$, важи $\mathcal{H}(a, b; c, d)$ ако и само су c и d симетрале углова који граде праве a и b (има их два и треба да c буде симетрала једног од њих, а d симетрала оног другог).

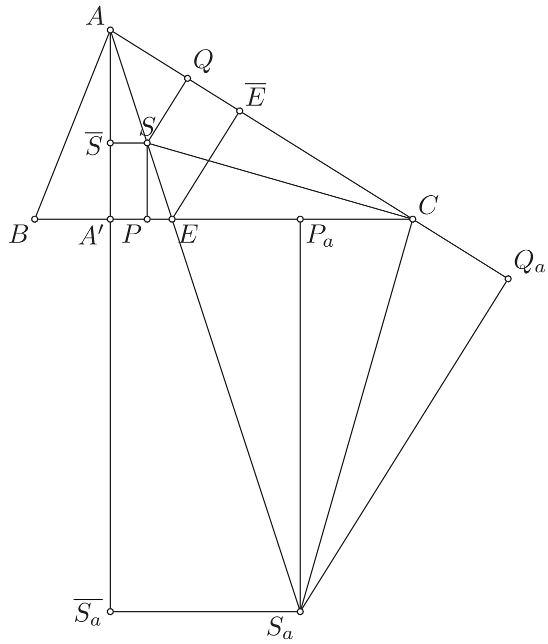
Због доказане симетричности релације хармонијске спрегнутости парова тачака, следи и симетричност релације хармонијске спрегнутости парова правих. Такође, често уместо „пар (P, Q) је хармонијски спрегнут с паром (R, S)” или „парови (P, Q) и (R, S) су хармонијски спрегнути” кажемо и „тачке P, Q, R, S су хармонијски спрегнуте”. Слично, често кажемо „праве a, b, c, d су хармонијски спрегнуте”.

9. Нека су $\overline{S}, \overline{S_a}, \overline{S_b}, \overline{S_c}$ пројекције тачака S, S_a, S_b, S_c на праву одређену висином AA' троугла ABC, а $\overline{E}$ пројекција E на праву AC. Доказати:

a) $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$, $\mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a)$, $\mathcal{H}(A', E; P, P_a)$;

b) $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$, $\mathcal{H}(A', F; P_b, P_c)$, $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c})$.

Решење:



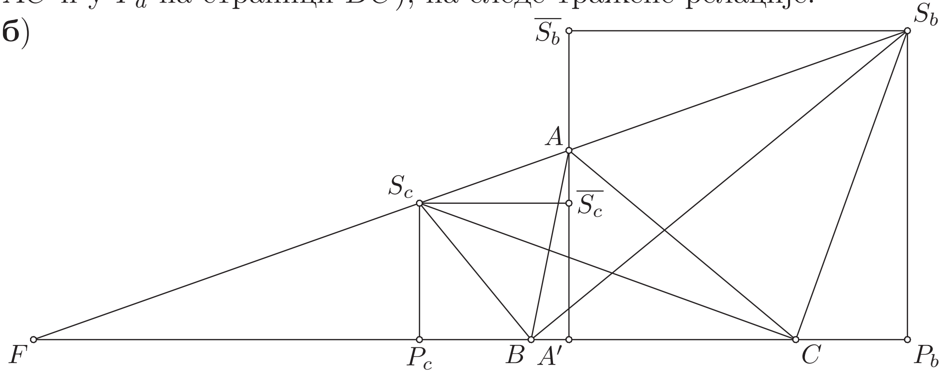
a) Тачке S, S_a су редом центар уписаног и спoља уписаног круга који додирује страницу BC, а тачка E је пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена A и (наспрамне) странице BC. На основу Теореме о симетрали угла (1. задатка) следи $AS : SE = AS_a : S_aE (= AC : CE)$. Такође, како важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, S, E, S_a)$ следи да су односи $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}}$ и $\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}}$ супротних знакова, па важи $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}} = -\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}}$, тј. $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$.

Сада ћемо доказати да се нормалним пројектовањем чува хармонијска спрегнутост тачака. Тачке A, S, E, S_a се пројектују у тачке $A, \overline{S}, A', \overline{S_a}$ и доказујемо да из $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ следи $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$. Важи $S\overline{S} \perp AA'$, $EA' \perp AA'$ и $S_a\overline{S_a} \perp AA'$, па следи да је $S\overline{S} \parallel EA' \parallel S_a\overline{S_a}$, па Талесова теорема даје $A\overline{S} : \overline{S}A' = AS : SE = AS_a : S_aE = A\overline{S_a} : \overline{S_a}A'$. Нормално пројектовање чува распоред тачака, па из распореда тачака $\mathcal{B}(A, S, E, S_a)$ закључујемо да важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, \overline{S}, A', \overline{S_a})$. Следи $\frac{\overrightarrow{A\overline{S}}}{\overrightarrow{\overline{S}A'}} = -\frac{\overrightarrow{A\overline{S_a}}}{\overrightarrow{\overline{S_a}A'}}$, па је $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$.

Сада када знамо да нормално пројектовање чува хармонијску спрегнутост тачака, из $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ директно следи $\mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a)$, као и

$\mathcal{H}(A', E; P, P_a)$. Заиста, тачке A, S, E, S_a пројектују се у тачке $A, Q, \overline{E}, Q_a$ на правој AC и у тачке A', P, E, P_a на правој BC (центри S, S_a уписаног и спољa уписаног круга пројектују се редом у додирне тачке тих кругова и одговарајуће странице, односно праве која је садржи; дакле, S се пројектује у Q на страници AC и у P на страници BC, а S_a у Q_a на правој AC и у P_a на страници BC), па следе тражене релације.

б)



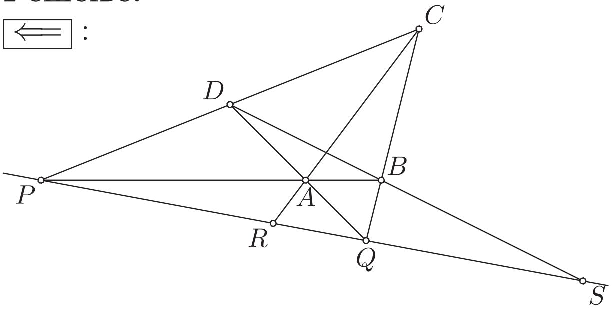
Тачке S_b, S_c су центри спољa уписаних кругова који додирују редом странице AC, AB, а тачка F је пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена A и (наспрамне) странице BC. На основу Теореме о симетрали угла (1. задатка) следи $AS_c : S_cF = AS_b : S_bF (= AB : BF)$. У зависности од тога да ли је $AB < AC$ или $AB > AC$ важи распоред $\mathcal{B}(F, S_c, A, S_b)$ или распоред $\mathcal{B}(F, S_b, A, S_c)$ (не може бити $AB = AC$, јер је тада симетрала спољашњег угла код темена A паралелна с правом BC и не постоји тачка F), па су односи $\frac{\overrightarrow{AS_b}}{\overrightarrow{S_bF}}$ и $\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{S_cF}}$ супротних знакова. Дакле, $\frac{\overrightarrow{AS_b}}{\overrightarrow{S_bF}} = -\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{S_cF}}$, па важи $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$.

Нормалним пројектовањем тачке F, S_c, A, S_b пројектују се у тачке F, P_c, A', P_b на правој BC и у тачке $A', \overline{S_c}, A, \overline{S_b}$ на правој AA', па из $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$ следе $\mathcal{H}(A', F; P_b, P_c)$ и $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c})$.

10. Важи $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$ ако и само ако постоје четири тачке A,B,C,D такве да важи $AB\cap CD=\{P\}$, $BC\cap AD=\{Q\}$, $PQ\cap AC=\{R\}$, $PQ\cap BD=\{S\}$.

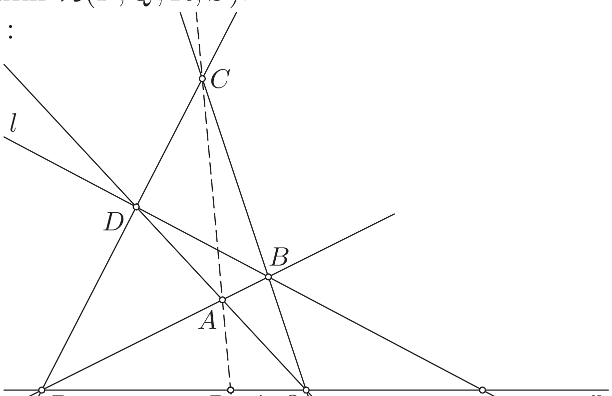
Решење:

$\boxed{\Longleftarrow}$:



Нека су A,B,C,D четири разне тачке у равни и нека постоје тачке $\{P\}=AB\cap CD$, $\{Q\}=BC\cap AD$, $\{R\}=PQ\cap AC$, $\{S\}=PQ\cap BD$. Посматрајмо троугао $\triangle PQC$, тачке R,B,D редом на његовим страницама PQ,QC,CP и тачку S на правој PQ. Праве PB,QD,CR секу се у тачки A, па оне припадају једном прамену. Према Чевиној теореми следи да је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}\cdot\frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{BC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DP}}=1$. Такође, тачке S,B,D су колинеарне, па је према Менелајевој теореми $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}\cdot\frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{BC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DP}}=-1$. Следи да је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}=\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{QB}}\cdot\frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{CD}}=-\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$, па важи $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$:



Нека су P,Q,R,S хармонијски спрегнуте тачке (важи $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$). Означимо са p праву која садржи тачке P,Q,R,S. Треба пронаћи неке четири тачке A,B,C,D у некој равни која садржи праву p тако да важи $\{P\}=AB\cap CD$, $\{Q\}=BC\cap AD$, $\{R\}=PQ\cap AC$, $\{S\}=PQ\cap BD$. Одаберимо произвољну праву l која садржи тачку S и различита је од праве p и одаберимо на њој произвољне две разне тачке B,D различите од тачке S такве да $PB\nparallel QD$ и $PD\nparallel QB$ (убрзо ћемо видети зашто морамо наметнути баш ова два услова). Како желимо да одаберемо тачке

A, C тако да буде $\{P\} = AB \cap CD$ и $\{Q\} = BC \cap AD$, добијамо да тачка A мора припадати правима PB и QD и да тачка C мора припадати правима PD и QB. Из тих разлога нека је $\{A\} = PB \cap QD$ и $\{C\} = PD \cap QB$ (дакле, морамо наметнути услове $PB \nparallel QD$ и $PD \nparallel QB$ да би постојали пресеци тих правих).

Сада имамо четири тачке A, B, C, D и треба још проверити да ли је $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = BC \cap AD$, $\{R\} = PQ \cap AC$, $\{S\} = PQ \cap BD$. Прве две једнакости важе јер смо бирали тачке A, C тако да оне важе. Takoђе, важи и четврта једнакост ($\{S\} = PQ \cap BD$) јер смо тако бирали тачке B, D. Треба још проверити да ли је $\{R\} = PQ \cap AC$. Означимо пресек правих PQ и AC са R'. На основу дела $\boxed{\Longleftarrow}$ следи да важи $\mathcal{H}(P, Q; R', S)$, односно $\frac{\overrightarrow{PR'}}{\overrightarrow{R'Q}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. По претпоставци важи и $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, односно $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Дакле, следи $\frac{\overrightarrow{PR'}}{\overrightarrow{R'Q}} = \frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = k$, па је $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = k\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RQ} = (k+1)\overrightarrow{RQ}$, али и $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR'} + \overrightarrow{R'Q} = k\overrightarrow{R'Q} + \overrightarrow{R'Q} = (k+1)\overrightarrow{R'Q}$, те је $R' = R$. Према томе, важи и $\{R\} = PQ \cap AC$.

Дефиниција 17. Нека су A, B, C три колинеарне тачке. Дефинишемо израз $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ на следећи начин:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \cdot AC, & \text{ако није } \mathcal{B}(B, A, C) \\ -AB \cdot AC, & \text{ако јесте } \mathcal{B}(B, A, C) \end{cases}.$$

11. Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB, тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.

Решење:

Лако се проверава да израз дефинисан у дефиницији 17 суштински представља скаларни производ колинеарних вектора. Заиста, ако није $\mathcal{B}(B, A, C)$, онда је $\cos\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos 0 = 1$, па добијамо $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC$, а ако јесте $\mathcal{B}(B, A, C)$, онда је $\cos\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos\pi = -1$, па је $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = -AB \cdot AC$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B; C, D) &\iff \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \\ &\iff \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

$$\iff (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$$

(овде користимо дистрибутивност „множења” у односу на сабирање вектора)

$$\begin{aligned}\iff \quad & \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} \quad = \\ = \quad & -\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

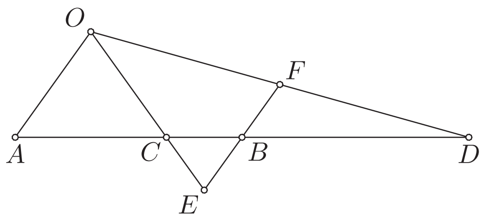
Сада искористимо да је $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}$ и да за свако X,Y важи $-\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{YX}$.

$$\begin{aligned}\iff \quad & -\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} \quad = \\ = \quad & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iff \quad & 2OB^2=2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\\ \iff \quad & OB^2=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\\ \iff \quad & AO^2=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}.\end{aligned}$$

12. Ако су A,B,C,D разне тачке праве p, O тачка ван те праве, E и F тачке у којима права која садржи тачку B и паралелна је OA сече OC и OD, доказати да важи $\mathcal{H}(A,B;C,D)\iff B$ је средиште EF.

Решење:



На основу Талесове теореме следи да је $AC:CB=AO:EB$, као и $AD:DB=AO:BF$, па је

$$AC:CB=AD:DB\iff AO:EB=AO:BF\iff EB=BF.$$

По претпоставци су A,B,C,D разне тачке праве p, па се лако закључује да је $AC:CB=AD:DB$ могуће само у случају да је $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=-\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$. Дакле,

$$\mathcal{H}(A,B;C,D)\iff AC:CB=AD:DB\iff EB=BF.$$

Да би ово било еквивалентно са тиме да је B средиште дужи EF, треба само проверити да ли су тачке E,F различите. Ако би било $E=F$, онда би праве OC и OD биле исте, а како се тачка O налази ван праве p која садржи C,D следило би да је $C=D$, што је у супротности с условом задатка. Дакле, $E\neq F$, па је заиста $EB=BF\iff B$ је средиште EF. Према томе, доказали смо да важи $\mathcal{H}(A,B;C,D)\iff B$ је средиште EF.