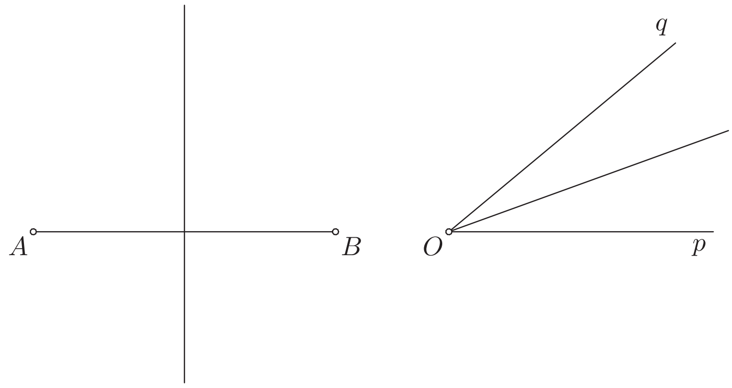
Дефиниција 9. Нека је α раван и нека се у њој налазе дуж AB и угао $\measuredangle pOq$. *Медијатриса* дужи AB је њена симетрала, тј. то је права у равни α која садржи њено средиште и нормална је на њој. *Бисектриса* угла $\measuredangle pOq$ је полуправа чије је теме тачка O, која припада углу $\measuredangle pOq$ и која дели угао $\measuredangle pOq$ на два подударна угла.

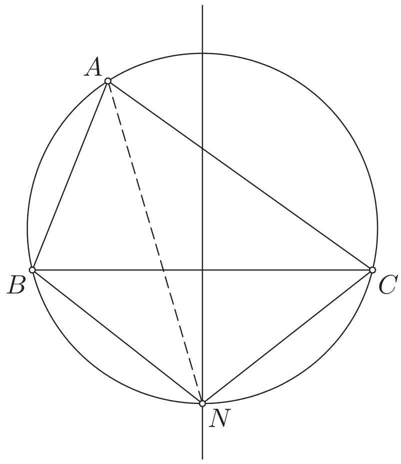
Дакле, медијатриса дужи је исто што и симетрала дужи, док је бисектриса угла *полуправа* која га дели на два подударна угла за разлику од симетрале угла која је *права* која садржи бисектрису.



Теорема 6. *Нека је α раван и нека се у њој налазе дуж AB и угао $\measuredangle pOq$. Медијатриса дужи AB је скуп свих тачака X равни α таквих да је $XA = XB$. Бисектриса угла $\measuredangle pOq$ је скуп свих тачака Y равни α које припадају углу $\measuredangle pOq$ таквих да је $YY_1 = YY_2$, где је Y_1 подножје нормале из Y на крак Op, а Y_2 подножје нормале из Y на крак Oq.*

9. Медијатриса странице и бисектриса наспрамног угла троугла секу се у тачки која припада описаном кругу тог троугла. Доказати.

Решење:

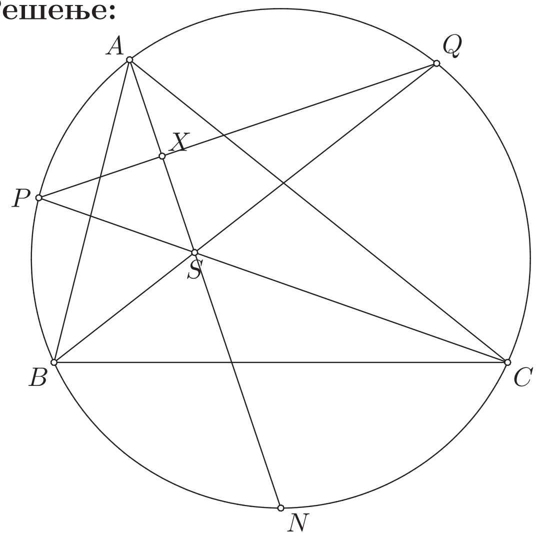


Нека је N пресечна тачка медијатрисе странице BC и описаног круга троугла $\triangle ABC$ која припада оном луку $\overset{\frown}{BC}$ којем не припада тачка A (наиме, постоје две пресечне тачке медијатрисе странице BC и описаног круга, па морамо прецизирати коју од њих желимо означити са N, а како желимо да то буде она тачка која се налази у углу $\measuredangle BAC$ и како имамо два лука $\overset{\frown}{BC}$, за N бирамо тачку на оном луку $\overset{\frown}{BC}$ на којем се не налази тачка A). Све што сада треба доказати јесте да је полуправа AN бисектриса угла $\measuredangle BAC$, па је довољно доказати да је $\measuredangle BAN = \measuredangle NAC$.

Троугао $\triangle NBC$ је једнакокраки јер је $NB = NC$ (N је на медијатриси дужи BC), па следи да је $\measuredangle NBC = \measuredangle BCN$. Означимо те углове са φ. Углови $\measuredangle BAN$ и $\measuredangle BCN$ су оба периферијска над луком $\overset{\frown}{BN}$, па су они подударни, тј. $\measuredangle BAN = \measuredangle BCN = \varphi$. Слично, углови $\measuredangle NAC$ и $\measuredangle NBC$ су оба периферијска над луком $\overset{\frown}{NC}$, па су они подударни, тј. важи $\measuredangle NAC = \measuredangle NBC = \varphi$. Овим је доказ завршен, јер је сада $\measuredangle BAN = \varphi = \measuredangle NAC$.

10. Нека су P и Q средишта лукова AB и AC круга описаног око троугла ABC и s_α бисектриса угла $\measuredangle BAC$. Доказати да је $PQ \perp s_\alpha$.

Решење:



Из 9. задатка имамо да су P, Q тачке такве да су CP, BQ бисектрисе углова $\measuredangle BCA$ и $\measuredangle ABC$. Као што знамо, бисектрисе унутрашњих углова троугла секу се у центру уписаног круга, па означимо пресечну тачку CP, BQ, s_α са S. Такође, означимо са X пресечну тачку PQ и s_α.

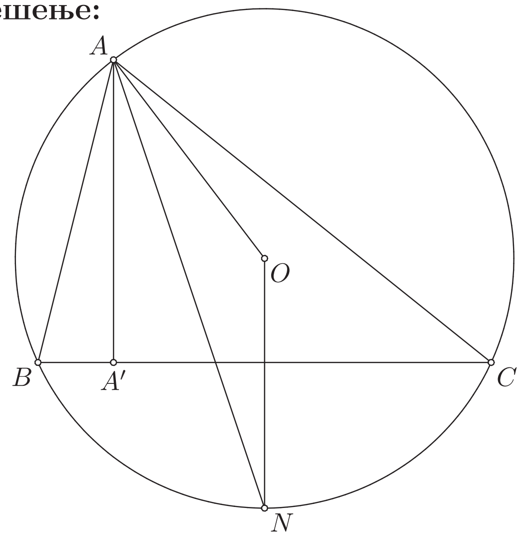
Посматрајмо троугао $\triangle XSQ$ и израчунајмо његове унутрашње углове. Прво имамо да је $\measuredangle XQS = \measuredangle PQB = \measuredangle PCB = \frac{\gamma}{2}$, јер је CP бисектриса угла $\measuredangle BCA = \gamma$. Угао $\measuredangle XSQ$ је спољашњи угао троугла $\triangle ABS$, па је једнак збиру његових несуседних унутрашњих углова, а то су углови $\measuredangle BAS$ и $\measuredangle ABS$. Из чињенице да су AS и BS бисектрисе углова $\measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$ следи да је $\measuredangle BAS = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle ABS = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\measuredangle XSQ = \measuredangle BAS + \measuredangle ABS = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, па је

$$\measuredangle SXQ = \pi - \measuredangle XSQ - \measuredangle XQS = \pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

а то управо значи да је $QX \perp XS$, односно да је $PQ \perp s_\alpha$.

11. Нека су A', N и O редом подножје висине из A, пресек бисектрисе угла $\measuredangle BAC$ са описаном кругом троугла ABC ($AB < AC$) и центар описаног круга, доказати $\measuredangle A'AN = \measuredangle ANO = \measuredangle NAO = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC - \measuredangle ACB)$.

Решење:



На основу 9. задатка следи да се тачка N налази на медијатриси странице BC, па пошто и тачка O припада тој медијатриси, следи да је права ON баш медијатриса странице BC. Одавде добијамо да је $ON \perp BC$, а како је и $AA' \perp BC$, следи да је $ON \parallel AA'$. Сада имамо да углови $\measuredangle A'AN$ и $\measuredangle ANO$ имају заједнички крак AN и паралелне краке $A'A$ и NO, па су то подударни углови. Дакле, $\measuredangle A'AN = \measuredangle ANO$. Троугао $\triangle ANO$ је једнакокрак, јер су OA и ON полупречници описаног круга троугла $\triangle ABC$, па су подударни, тј. $OA = ON$. Следи да су углови наспрам њих подударни, тј. да је $\measuredangle ANO = \measuredangle NAO$.

Сада када знамо да су ови углови подударни, треба да изразимо било који од њих преко углова β и γ, тј. углова $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ACB$. Изразимо нпр. угао $\measuredangle A'AN$. Имамо да је $\measuredangle A'AN = \measuredangle BAN - \measuredangle BAA'$ и да је $\measuredangle BAN = \frac{\alpha}{2}$. Како је троугао $\triangle ABA'$ правоугли и $\measuredangle A'BA = \measuredangle CBA = \beta$, следи да је $\measuredangle BAA' = \pi - \measuredangle BA'A - \measuredangle A'BA = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$. Сада имамо да је

$$\begin{aligned}\measuredangle A'AN &= \measuredangle BAN - \measuredangle BAA' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\alpha - \pi + 2\beta}{2} \\ &= \frac{\alpha - (\alpha + \beta + \gamma) + 2\beta}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2},\end{aligned}$$

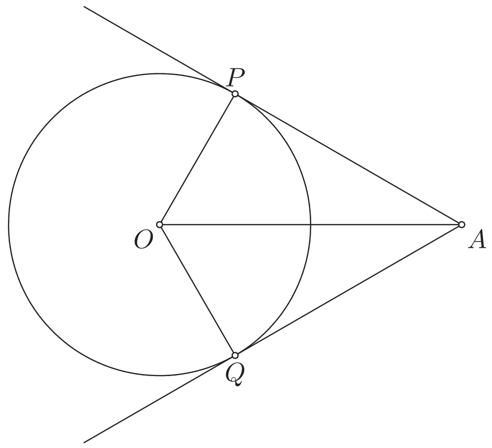
што је и требало доказати.

Напомена 3. Где се овде користила претпоставка да је $AB < AC$? Ако замислимо да смо на претходној слици обрнуто означили тачке B и C, онда није $\measuredangle A'AN = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC - \measuredangle ACB)$, него је $\measuredangle A'AN = \frac{1}{2}(\measuredangle ACB - \measuredangle ABC)$. Поента је у томе што се при претпоставци $AB > AC$ мења распоред тачака на слици и онда не важе неке ствари које важе када је $AB < AC$. Конкретно, не важи $\measuredangle A'AN = \measuredangle BAN - \measuredangle BAA'$, већ $\measuredangle A'AN = \measuredangle A'AB - \measuredangle NAB$, па то мења резултат.

У строго формалном доказу, какви су нпр. докази на предавањима, морали бисмо помоћу претпоставке $AB < AC$ доказивати да важи распоред тачака који добијамо цртањем слике. Међутим, када решавамо задатке на колоквијуму или испиту, ми то не морамо да доказујемо, већ је довољно да то „видимо са слике”. Зато је неопходно нацртати слику која одговара датој претпоставци. Конкретно у овом задатку, треба нацртати слику тако да заиста буде $AB < AC$, што смо и учинили.

Дефиниција 10. Нека је A тачка ван круга k и нека су P, Q додирне тачке тангенти из тачке A на кругу k. Дужи AP, AQ зову се *тангентне дужи* из тачке A на кругу k.

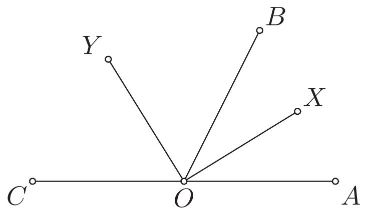
Теорема 7. *Тангентне дужи из тачке A на кругу k су подударне.*



Доказ: Посматрајмо троуглове $\triangle OPA$ и $\triangle OQA$. Њима је заједничка страница OA, странице OP и OQ су подударне јер су то полупречници круга k, углови $\measuredangle OPA$ и $\measuredangle OQA$ су прави (углови између тангенти и полупречника), па су подударни, а углови $\measuredangle OAP$ и $\measuredangle OAQ$ су оба оштра јер већ имамо праве углове у троугловима $\triangle OPA$ и $\triangle OQA$, па преостали углови морају бити оштри. Закључујемо на основу става ССУ да је $\triangle OPA \cong \triangle OQA$, па је $AP = AQ$, што је и требало доказати. $\square$

Дефиниција 11. *Напоредни углови* су они углови који имају заједничко теме и један крак, а преостали краци припадају једној правој.

Теорема 8. *Бисектрисе напоредних углова су међусобно нормалне.*

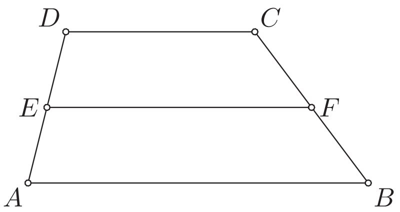


Доказ: Нека је $\measuredangle AOB = \alpha$ и $\measuredangle BOC = \beta$. Тада је $\alpha + \beta = \pi$. Ако је OX бисектриса угла $\measuredangle AOB$, а OY бисектриса угла $\measuredangle BOC$, онда је $\measuredangle XOB = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle BOY = \frac{\beta}{2}$. Следи да је $\measuredangle XOY = \measuredangle XOB + \measuredangle BOY = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$, тј. да су бисектрисе OX и OY међусобно нормалне. $\square$

Дефиниција 12. Четвороугао $ABCD$ је *трапез* са *основицама* AB, CD и *крацима* AD, BC ако је $AB \parallel CD$.

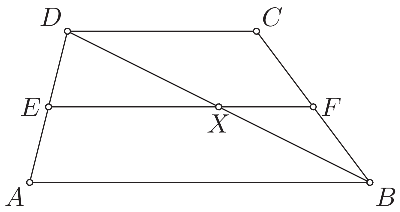
Имали смо средњу линију троугла, а сада ћемо дефинисати и средњу линију трапеза.

Дефиниција 13. Нека је $ABCD$ трапез и нека су E, F редом средишта кракова AD, BC. Дуж EF зове се *средња линија* трапеза $ABCD$.

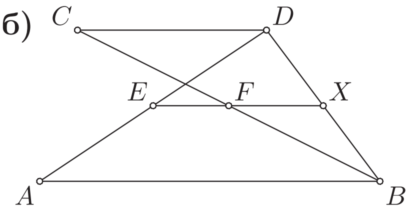


Теорема 9. *Нека је четвороугао $ABCD$ трапез и нека су E, F средишта кракова AD, BC. Тада је средња линија EF паралелна основицама трапеза, тј. $EF \parallel AB$ и $EF \parallel CD$ и важи*
а) *$EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ ако је трапез $ABCD$ конвексан;*
б) *$EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$ ако је трапез $ABCD$ неконвексан и $AB > CD$.*

Доказ: **а)**



Нека је X средиште дијагонале BD трапеза $ABCD$. Следи да је EX средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $EX \parallel AB$ и $EX = \frac{1}{2}AB$. Слично, XF је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $XF \parallel CD$ и $XF = \frac{1}{2}CD$. Како је $AB \parallel CD$, следи да је $EX \parallel XF$, па су тачке E, X, F колинеарне. Одавде добијамо да је $EF \parallel AB$ и $EF = EX + XF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

б) 

Нека је X средиште дијагонале BD трапеза $ABCD$. Следи да је EX средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $EX \parallel AB$ и $EX = \frac{1}{2}AB$. Слично, XF је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $XF \parallel CD$ и $XF = \frac{1}{2}CD$. Како је $AB \parallel CD$, следи да је $EX \parallel XF$, па су тачке E, X, F колинеарне. Одавде добијамо да је $EF \parallel AB$ и $EF = EX - XF = \frac{1}{2}(AB - CD)$. $\square$

Напомена 4. Ми смо доказали да су одређене дужи средње линије (троугла или трапеза) ако знамо да су њени крајеви средишта одговарајућих страница и онда смо добијали паралелност. Међутим, довољно је да знамо само за један крај дужи да је средиште одговарајуће странице и да знамо паралелност да би посматрана дуж била средња линија. Ово убудуће можемо користити.

12. (**Велики задатак**) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC $(b > c)$, са p полуобим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB, са P_i, Q_i, R_i $(i = a, b, c)$ тачке у којима спођа уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB, са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l, при чему је M на луку BAC, са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB, са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c, доказати да је:

1) $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, $\quad \mathcal{B}(A, P, P'_a)$, $\quad \mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$, $\quad \mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$;

2) $AQ_a = AR_a = p$, $\quad QQ_a = RR_a = a$, $\quad Q_bQ_c = R_bR_c = a$;

3) $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$;

4) $PP_a = b - c$, $\quad P_bP_c = b + c$;

5) $PA_1 = P_aA_1$, $\quad P_cA_1 = P_bA_1$;

6) $NS = NS_a = NB = NC$, $\quad MS_b = MS_c = MB = MC$;

7) $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$, $\quad A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$;

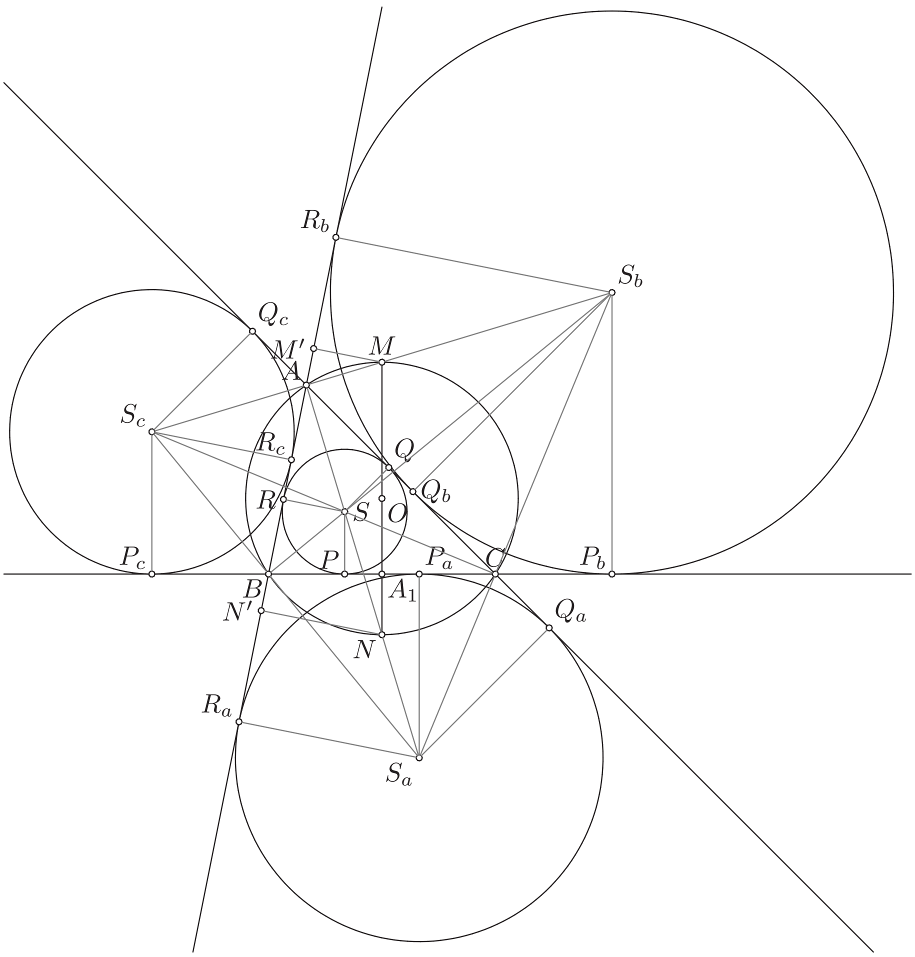
8) $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$, $\quad NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$;

9) $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$;

10) $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN', \quad AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$;

11) $M'N' = b$.

Решење:

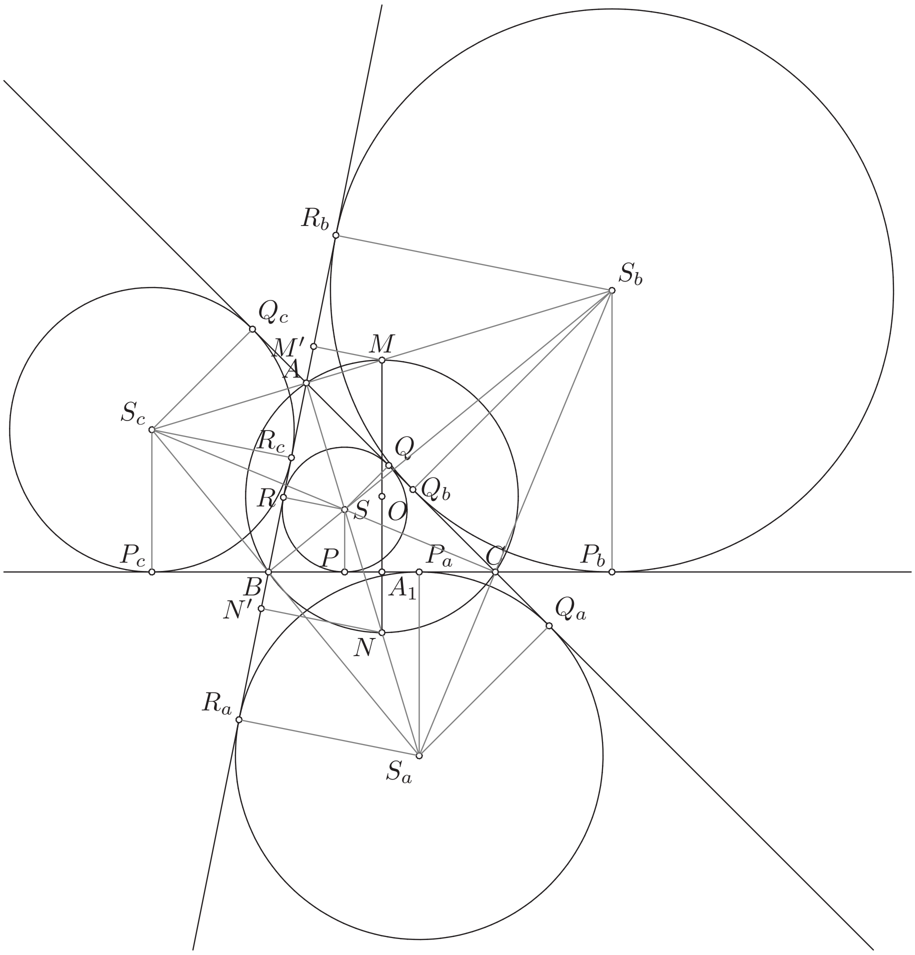


1) Ово тврђење нећемо сада доказивати, јер ћемо у доказу користити сличност. Доказ ћемо видети у следећем поглављу.

2) Доказујемо $AQ_a = AR_a = p, \quad QQ_a = RR_a = a, \quad Q_bQ_c = R_bR_c = a$. Дужи AQ_a и AR_a су тангентне дужи из тачке A на споља уписаном кругу k_a, па следи да су оне подударне, тј. да је $AQ_a = AR_a$. Да бисмо доказали да су те дужи једнаке полуобиму троугла $\triangle ABC$, посматрајмо збир $AQ_a + AR_a$. Имамо да је $AQ_a + AR_a = AC + CQ_a + AB + BR_a = AC + AB + CQ_a + BR_a$, па како је $CQ_a = CP_a$ и $BR_a = BP_a$, јер су то тангентне дужи редом из тачака C, B на кругу k_a, следи да је

$$\begin{aligned} AQ_a + AR_a &= AC + AB + CQ_a + BR_a \\ &= b + c + CP_a + BP_a = b + c + BC \\ &= b + c + a = 2p, \end{aligned}$$

па је $AQ_a = AR_a = \frac{2p}{2} = p$, што је и требало доказати. Такође, јасно је да смо овим доказали да је и $BP_b = BR_b = p$, као и $CP_c = CQ_c = p$, јер смо већ напомињали да су сва три темена троугла равноправна.



Даље, како је $AQ = AR$, јер су то тангентне дужи из тачке A на уписаном кругу k, следи да је $QQ_a = AQ_a - AQ = AR_a - AR = RR_a$. Такође, пошто знамо да је $AQ_a = AR_a = p$, треба да докажемо да је $AQ = AR = p - a$, да би било $QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a$. У том циљу, означимо $AQ = AR = x$, $BR = BP = y$ (тангентне дужи из

B на k) и $CP = CQ = z$ (тангентне дужи из C на k). Сада из очигледних једнакости

$$\begin{aligned} AR + RB &= AB \\ BP + PC &= BC \\ CQ + QA &= CA \end{aligned}$$

следи да имамо следећи систем линеарних алгебарских једначина са непознатим x, y, z:

$$\begin{aligned} x + y &= c \\ y + z &= a \\ z + x &= b. \end{aligned}$$

Саберимо све три једначине и добићемо $x + y + y + z + z + x = c + a + b$, односно $2(x + y + z) = 2p$, односно $x + y + z = p$. Сада лако добијамо да је

$$\begin{aligned} x &= x + y + z - (y + z) = p - a, \\ y &= x + y + z - (x + z) = p - b \qquad \text{и} \\ z &= x + y + z - (x + y) = p - c. \end{aligned}$$

Дакле, доказали смо да је $AQ = AR = x = p - a$ (успут смо доказали и да је $BR = BP = y = p - b$ и $CP = CQ = z = p - c$), па је

$$QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a.$$

Приметимо да је $Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b$, а имамо да је $CQ_c = p$, као и да је $CQ_b = CP_b$ јер су то тангентне дужи из тачке C на кругу k_b. Како је $CP_b = BP_b - BC$ и $BP_b = p$, следи да је $CP_b = p - a$, па имамо да је

$$Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b = p - CP_b = p - (p - a) = a.$$

Слично, приметимо да је $R_bR_c = BR_b - BR_c$, затим да је $BR_b = p$, да је $BR_c = BP_c = CP_c - CB$ и да је $CP_c = p$, па је $BR_c = CP_c - CB = p - a$, што значи да је

$$R_bR_c = BR_b - BR_c = p - (p - a) = a,$$

што је и требало доказати.
3) Доказујемо $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$. Све смо већ доказали док смо доказивали **2)**. Заиста, доказали смо да је

$AQ = AR = x = p - a$, затим да је $CQ_b = CP_b = p - a$ и коначно да је $BR_c = BP_c = p - a$. Дакле, заиста је

$$AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a.$$

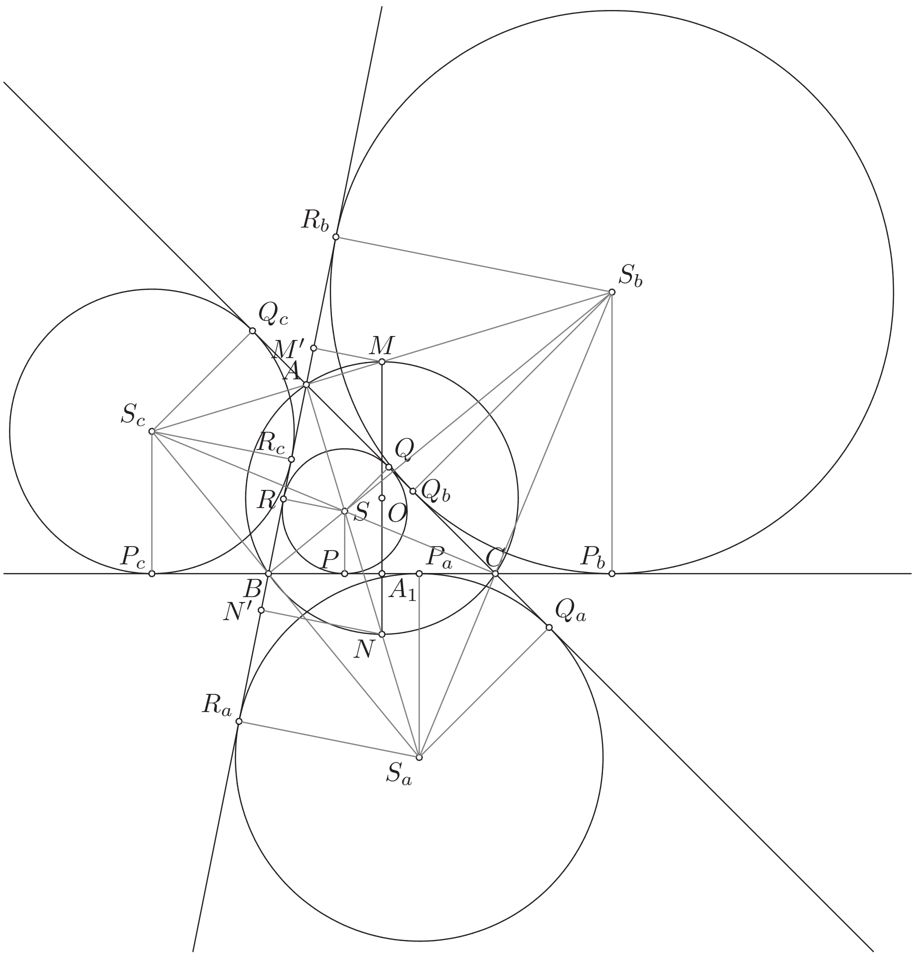
4) Доказујемо $PP_a = b - c, \quad P_bP_c = b + c$. Имамо да је $PP_a = BP_a - BP$ и знамо да је $BP = y = p - b$. Како је $BP_a = BR_a$ јер су то тангентне дужи из B на кругу k_a и како је $BR_a = AR_a - AB = p - c$, следи да је

$$PP_a = BP_a - BP = BR_a - (p - b) = p - c - (p - b) = b - c.$$

Даље, имамо да је $P_bP_c = P_bC + CP_c$ и знамо да је $P_bC = p - a$ и да је $CP_c = p$, па следи да је

$$P_bP_c = P_bC + CP_c = p - a + p = 2p - a = a + b + c - a = b + c.$$

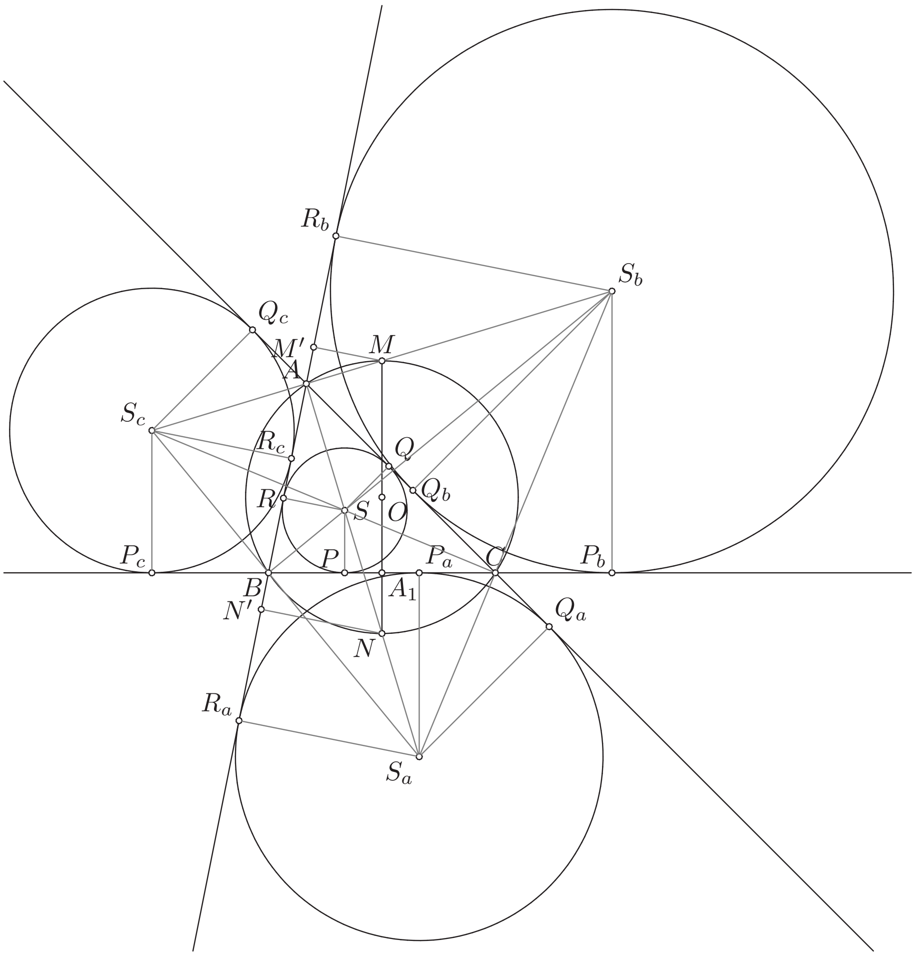
што је и требало доказати.



5) Доказујемо $PA_1 = P_aA_1$, $\quad P_cA_1 = P_bA_1$. Практично треба доказати да је A_1 (средиште дужи BC) средиште дужи PP_a и P_bP_c. Имамо да је

$$\begin{aligned} PA_1 &= BA_1 - BP = \frac{1}{2}BC - (p-b) \\ &= \frac{a}{2} - \frac{a+b+c}{2} + b = \frac{a-a-b-c+2b}{2} \\ &= \frac{b-c}{2} = \frac{1}{2}PP_a, \end{aligned}$$

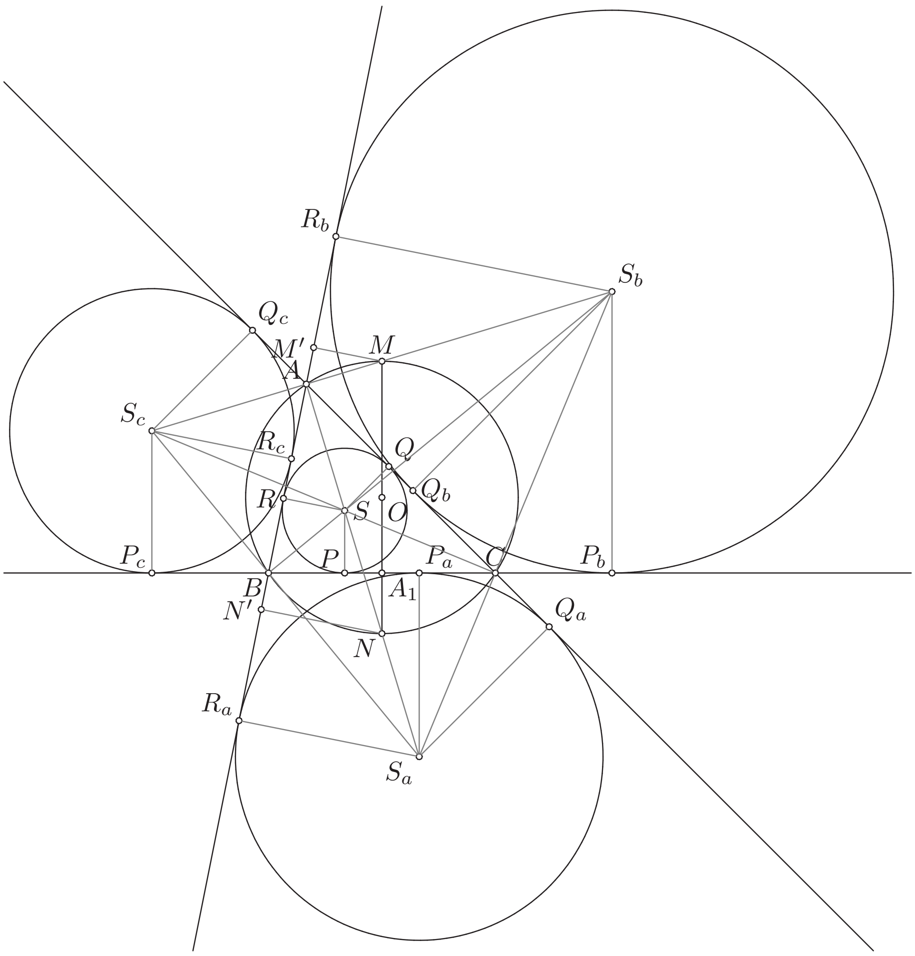
па је заиста A_1 средиште дужи PP_a, тј. $PA_1 = P_aA_1$.



Слично, имамо да је

$$\begin{aligned} P_cA_1 &= P_cB + BA_1 = p - a + \frac{1}{2}BC \\ &= \frac{a+b+c}{2} - a + \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-2a+a}{2} \\ &= \frac{b+c}{2} = \frac{1}{2}P_cP_b, \end{aligned}$$

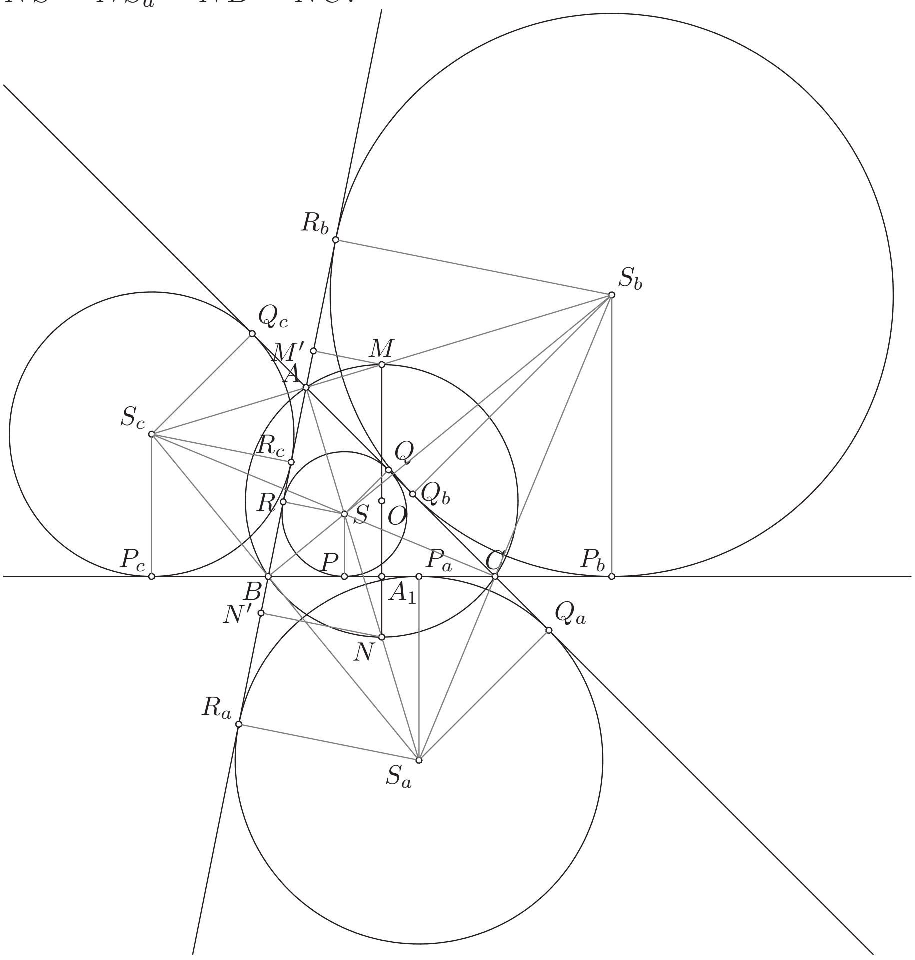
па је A_1 средиште дужи P_cP_b, односно важи $P_cA_1 = P_bA_1$.



6) Доказујемо $NS = NS_a = NB = NC$, $\quad MS_b = MS_c = MB = MC$. Четвороугао SPP_aS_a је трапез јер је $SP \perp BC$ и $S_aP_a \perp BC$, па је $SP \parallel S_aP_a$. Такође, $A_1N \perp BC$ јер је права A_1N симетрала дужи BC, па је $A_1N \parallel SP$ и $A_1N \parallel S_aP_a$. Како је A_1 средиште PP_a, следи да је

A_1N средња линија неконвексног трапеза SPP_aS_a. Закључујемо да је N средиште дужи SS_a и $A_1N = \frac{1}{2}(S_aP_a - SP) = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$.

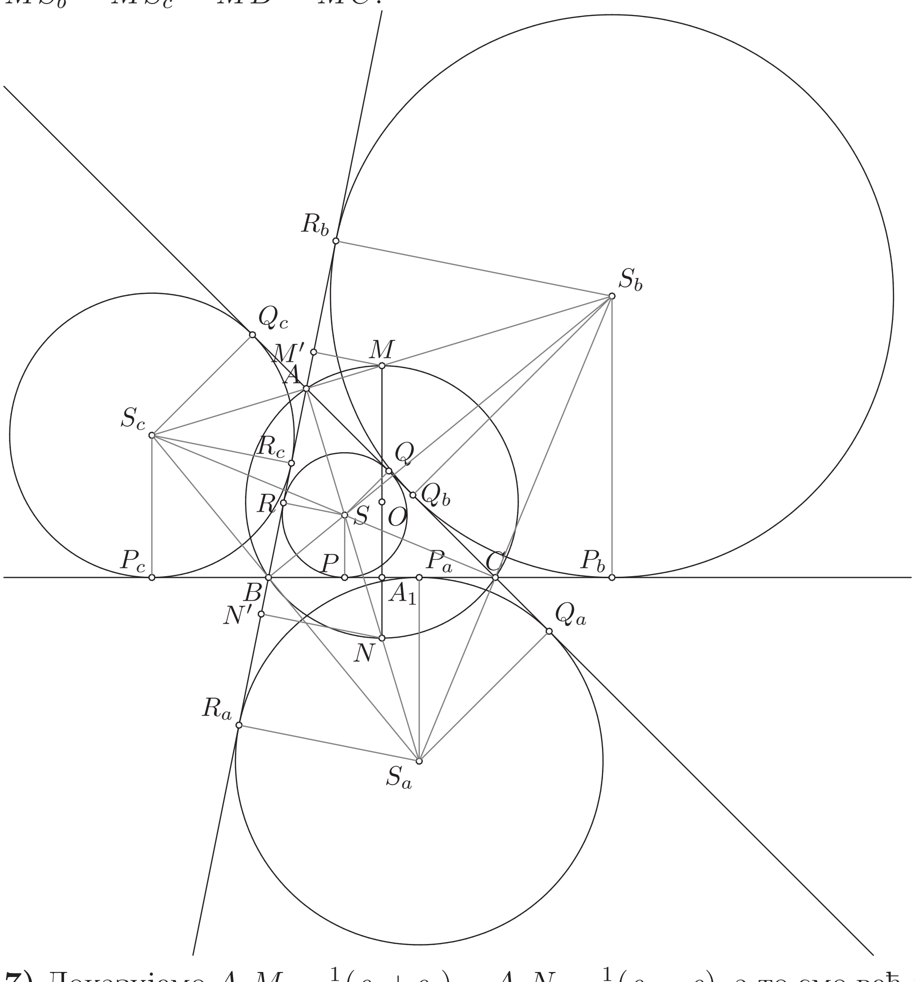
Троугао $\triangle SBS_a$ је правоугли с правим углом код темена B (SB је симетрала унутрашњег, а BS_a је симетрала спољашњег угла код темена B троугла $\triangle ABC$) и N је средиште хипотенузе SS_a, па је N центар описаног круга $\triangle SBS_a$. Следи да је $NS = NS_a = NB$, а како N припада симетрали дужи BC, следи да је $NB = NC$, па имамо да је $NS = NS_a = NB = NC$.



Докажимо да M припада бисекриси AS_b спољашњег угла $\measuredangle CAR_b$ троугла $\triangle ABC$. Како је AS бисектриса унутрашњег угла $\measuredangle BAC$ троугла $\triangle ABC$, следи да је $SA \perp AS_b$, тј. да је $\measuredangle SAS_b = \frac{\pi}{2}$. Тачка N припада бисектриси AS, па је $\measuredangle NAS_b = \frac{\pi}{2}$, а MN је пречник описаног круга l троугла $\triangle ABC$, па је $\measuredangle NAM = \frac{\pi}{2}$ (периферијски угао над пречником). Одавде закључујемо да тачка M припада полуправој AS_b, што смо и тражили.

Четвороугао $S_cP_cP_bS_b$ је трапез, јер је $S_cP_c \perp BC$ и $S_bP_b \perp BC$, па је $S_cP_c \parallel S_bP_b$. Такође, $A_1M \perp BC$ јер је права A_1M симетрала дужи BC, па је $A_1M \parallel S_cP_c$ и $A_1M \parallel S_bP_b$. Тачка A_1 је средиште P_cP_b, па следи да је A_1M средња линија (конвексног) трапеза $S_cP_cP_bS_b$. Закључујемо да је M средиште дужи S_bS_c и $A_1M = \frac{1}{2}(S_bP_b + S_cP_c) = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$.

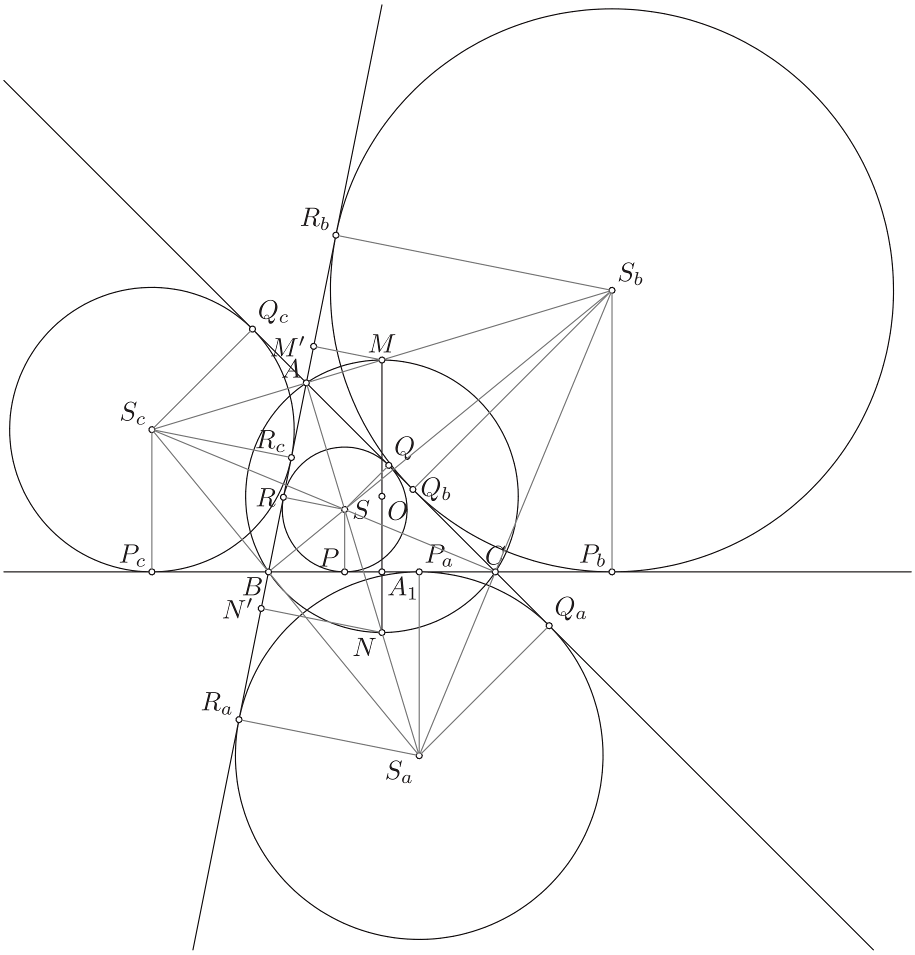
Троугао $\triangle S_bBS_c$ је правоугли с правим углом код темена B (S_bB је симетрала унутрашњег, а BS_c је симетрала спољашњег угла код темена B троугла $\triangle ABC$) и M је средиште хипотенузе S_bS_c, па следи да је M центар описаног круга троугла $\triangle S_bBS_c$. Према томе, $MS_b = MS_c = MB$, а како је $MB = MC$ јер M припада симетрали дужи BC, па следи да је $MS_b = MS_c = MB = MC$.



7) Доказујемо $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$, $\quad A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$, а то смо већ доказали док смо доказивали део **6)**.

8) Доказујемо $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$, $\quad NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$. Четвороугао $S_cR_cR_bS_b$ је трапез јер је $S_cR_c \perp AB$ и $S_bR_b \perp AB$, па је $S_cR_c \parallel S_bR_b$. Такође, $MM' \perp AB$, па је $MM' \parallel S_cR_c$ и $MM' \parallel S_bR_b$, а M је средиште S_cS_b, па је MM' средња линија неконвексног трапеза $S_cR_cR_bS_b$. Следи да је $MM' = \frac{1}{2}(S_bR_b - S_cR_c) = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$.

Четвороугао SRR_aS_a је трапез јер је $SR \perp AB$ и $S_aR_a \perp AB$, па је $SR \parallel S_aR_a$. Такође, $NN' \perp AB$, па је $NN' \parallel SR \parallel S_aR_a$ и N је средиште SS_a, па је NN' средња линија конвексног трапеза SRR_aS_a. Закључујемо да је $NN' = \frac{1}{2}(SR + S_aR_a) = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$.



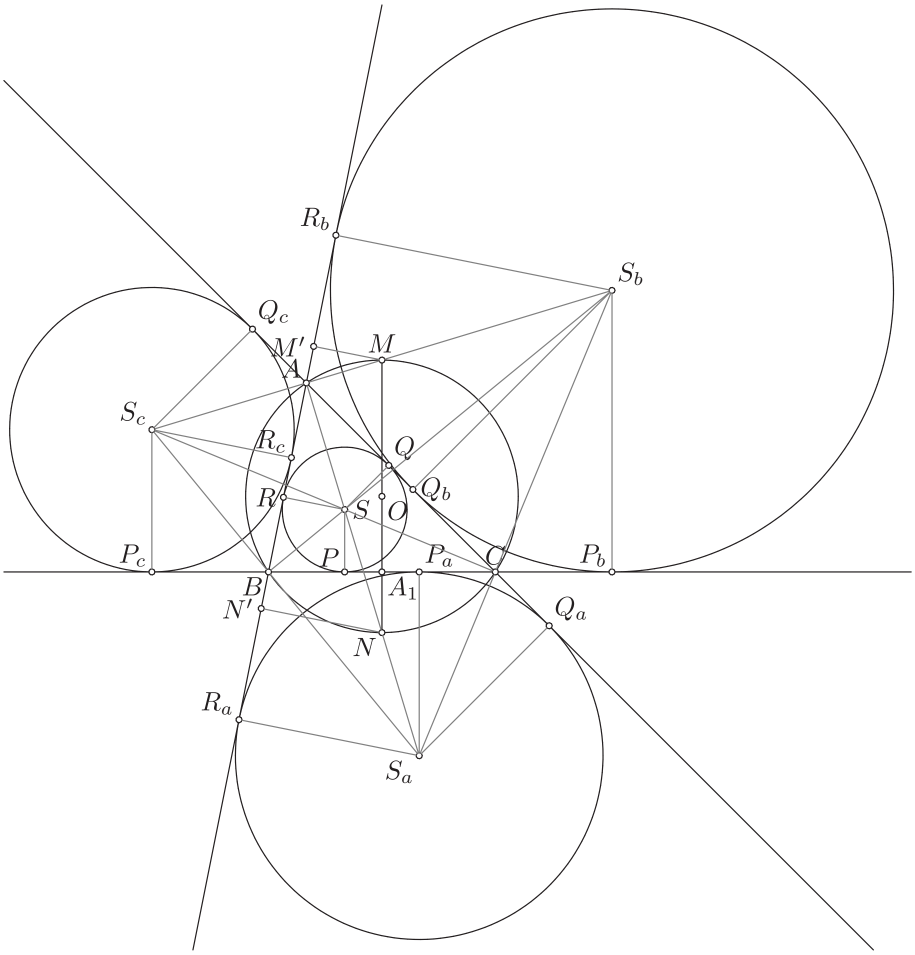
9) Доказујемо $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$. За пречник MN описаног круга l троугла $\triangle ABC$ имамо с једне стране да је $MN = 2r$, а с друге стране да је $MN = MA_1 + A_1N = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c + \rho_a - \rho)$. Дакле, $2r = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho)$, па је $4r = \rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho$, односно $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$.

10) Доказујемо $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN'$, $\quad AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$. У делу **8)** смо доказали да је MM' средња линија трапеза $S_cR_cR_bS_b$, па је M' средиште странице R_cR_b. Дакле, $R_cM' = \frac{1}{2}R_cR_b = \frac{a}{2}$. Даље имамо да је $BM' = BR_c + R_cM' = p - a + \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-2a+a}{2} = \frac{1}{2}(b + c)$ и да је $AM' = BM' - BA = \frac{1}{2}(b + c) - c = \frac{1}{2}(b - c)$.

Такође, у делу **8)** доказали смо да је NN' средња линија трапеза SRR_aS_a, па је N' средиште RR_a. Следи да је $N'R_a = \frac{1}{2}RR_a = \frac{a}{2}$, па је $AN' = AR_a - N'R_a = p - \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-a}{2} = \frac{1}{2}(b+c)$. Такође, следи да је $BN' = AN' - AB = \frac{1}{2}(b+c) - c = \frac{1}{2}(b-c)$.

Дакле, доказали смо да важи

$$AM' = BN' = \frac{1}{2}(b-c) \qquad \text{и} \qquad AN' = BM' = \frac{1}{2}(b+c).$$



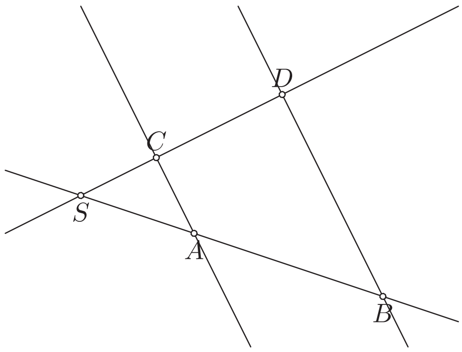
11) Доказујемо да је $M'N' = b$. Јасно је да је $M'N' = M'A + AN' = \frac{1}{2}(b-c+b+c) = b$ што је и требало доказати.

2 Сличност

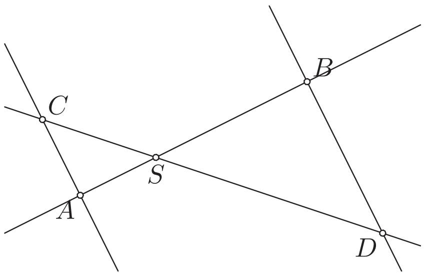
Подсетимо се Талесове теореме, једне од најстаријих теорема у математици.

Теорема 10 (Талес). *Нека се праве p, q секу у тачки S. Нека су A, B две различите тачке праве p, које су различите од S и нека су C, D две различите тачке праве q, које су различите од S. Тада је*

$$AC \parallel BD \iff \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD} = \frac{AC}{BD}$$
$$\iff \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}.$$



При томе, уопште не мора да важи распоред тачака као што је на овој слици. Теорема ће важити и ако имамо неки други распоред тачака.

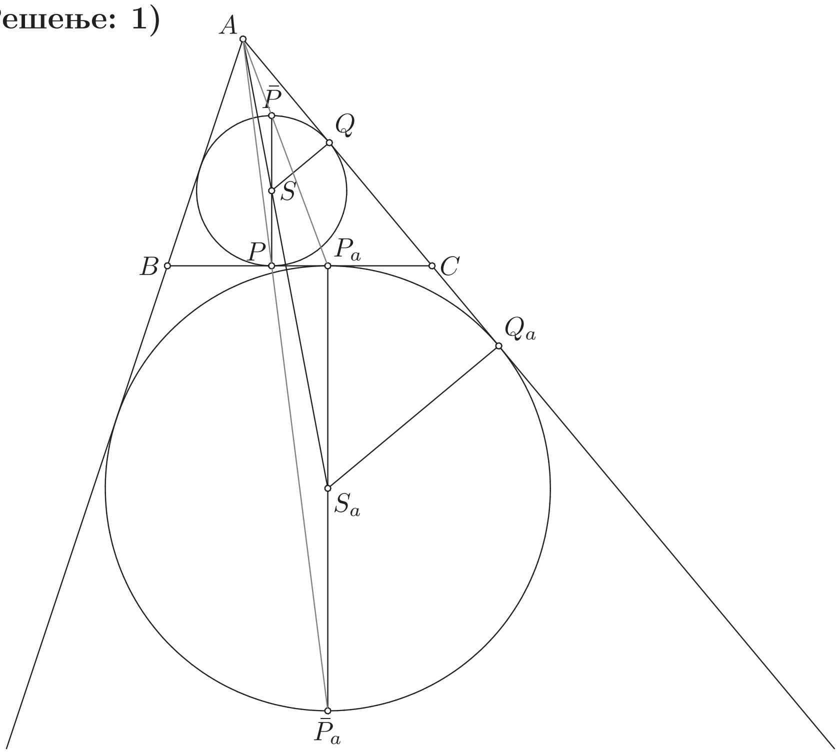


Искористимо Талесову теорему да решимо део **1)** Великог задатка (задатка 1.12).

1.12. (**Велики задатак**) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC $(b > c)$, са p полуобим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB, са P_i, Q_i, R_i $(i = a, b, c)$ тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB, са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l, при чему је M на луку BAC, са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB, са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c, доказати да је:

1) $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$, $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$.

Решење: 1)

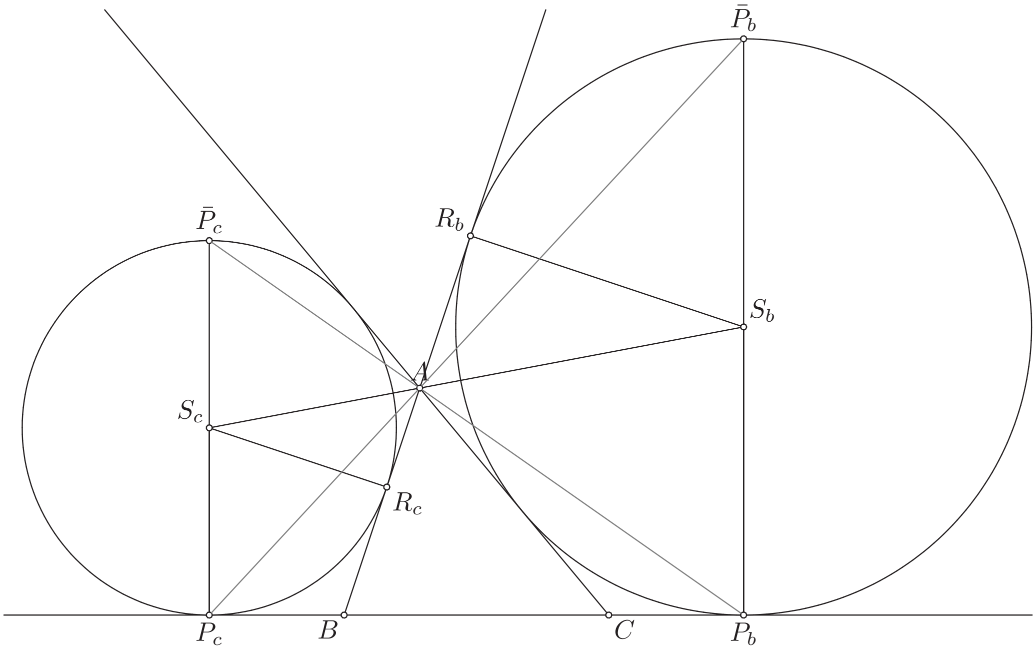


Нека је $\bar{P}$ пресечна тачка праве SP и праве AP_a. Довољно је доказати да важи $\mathcal{B}(A, \bar{P}, P_a)$ и $P' = \bar{P}$. Како тачке P, P' припадају уписаном кругу k троугла $\triangle ABC$ и правој SP и важи $SP = SP' = \rho$, а тачка P не припада правој AP_a, следи да је довољно доказати да је $S\bar{P} = \rho$ да би било $P' = \bar{P}$.

Праве SS_a и QQ_a се секу у тачки A и важи $SQ \perp AC$ и $S_aQ_a \perp AC$, па је $SQ \parallel S_aQ_a$. Према Талесовој теореми следи да је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{SQ}{S_aQ_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Такође, имамо и да се праве SS_a и $\bar{P}P_a$ секу у тачки A и да је $S\bar{P} \perp BC$ и $S_aP_a \perp BC$, па је $S\bar{P} \parallel S_aP_a$. Пошто важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, према Талесовој теореми следи да важи $\mathcal{B}(A, \bar{P}, P_a)$ и $\frac{S\bar{P}}{S_aP_a} = \frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Међутим, важи $S_aP_a = \rho_a$, па је $\frac{S\bar{P}}{\rho_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$, одакле закључујемо да је $S\bar{P} = \rho$, односно да је $P' = \bar{P}$. Дакле, важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$.

Нека је $\bar{P}_a$ пресечна тачка праве S_aP_a и праве AP. Довољно је доказати да важи $\mathcal{B}(A, P, \bar{P}_a)$ и $P'_a = \bar{P}_a$. Како тачке P_a, P'_a припадају споља уписаном кругу k_a троугла $\triangle ABC$ и правој S_aP_a и важи $S_aP_a = SP'_a = \rho_a$, а тачка P_a не припада правој AP, следи да је довољно доказати да је $S_a\bar{P}_a = \rho_a$ да би било $P_a' = \bar{P}_a$.

Већ смо доказали да је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Праве SS_a и $P\bar{P}_a$ се секу у тачки A и из $SP \perp BC$ и $S_a\bar{P}_a \perp BC$ закључујемо да је $SP \parallel S_a\bar{P}_a$. Пошто важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, на основу Талесове теореме следи да важи $\mathcal{B}(A, P, \bar{P}_a)$ и $\frac{S_a\bar{P}_a}{SP} = \frac{AS_a}{AS} = \frac{\rho_a}{\rho}$. Међутим, важи $SP = \rho$, па је $\frac{S_a\bar{P}_a}{\rho} = \frac{\rho_a}{\rho}$, одакле закључујемо да је $S_a\bar{P}_a = \rho_a$, тј. $P_a' = \bar{P}_a$. Дакле, важи $\mathcal{B}(A, P, P_a')$.



Нека је $\bar{P}_b$ пресечна тачка праве S_bP_b и праве AP_c и нека је $\bar{P}_c$ пресечна тачка праве S_cP_c и праве AP_b. Довољно је доказати да важи $\mathcal{B}(P_c, A, \bar{P}_b)$ и $P_b' = \bar{P}_b$, као и да важи $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$ и $P_c' = \bar{P}_c$. Како тачке P_b, P_b' припадају споља уписаном кругу k_b троугла $\triangle ABC$ и правој S_bP_b и важи $S_bP_b = S_bP_b' = \rho_b$, а тачка P_b не припада правој AP_c, следи да је довољно доказати да је $S_b\bar{P}_b = \rho_b$ да би било $P_b' = \bar{P}_b$. Слично, како тачке P_c, P_c' припадају споља уписаном кругу k_c троугла $\triangle ABC$ и правој S_cP_c и важи $S_cP_c = S_cP_c' = \rho_c$, а тачка P_c не припада правој AP_b, следи да је довољно доказати да је $S_c\bar{P}_c = \rho_c$ да би било $P_c' = \bar{P}_c$.

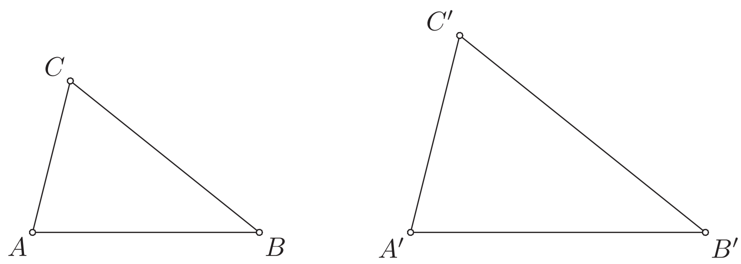
Праве S_bS_c и R_bR_c се секу у тачки A и важи $S_bR_b \perp AB$ и $S_cR_c \perp AB$, па је $S_bR_b \parallel S_cR_c$. Према Талесовој теореми следи да је $\frac{AS_b}{AS_c} = \frac{S_bR_b}{S_cR_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$. Такође, имамо и да се праве S_bS_c и $\bar{P}_bP_c$ секу у тачки A и да је $S_b\bar{P}_b \perp BC$ и $S_cP_c \perp BC$, па је $S_b\bar{P}_b \parallel S_cP_c$. Пошто важи $\mathcal{B}(S_c, A, S_b)$, према Талесовој теореми следи да важи $\mathcal{B}(P_c, A, \bar{P}_b)$ и $\frac{S_b\bar{P}_b}{S_cP_c} = \frac{AS_b}{AS_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$. Међутим, $S_cP_c = \rho_c$, па је $\frac{S_b\bar{P}_b}{\rho_c} = \frac{\rho_b}{\rho_a}$, одакле закључујемо да је $S_b\bar{P}_b = \rho_b$, односно да је $P_b' = \bar{P}_b$.

Дакле, важи $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$.

Праве S_bS_c и $P_b\bar{P}_c$ се секу у тачки A и из $S_bP_b \perp BC$ и $S_c\bar{P}_c \perp BC$ закључујемо да је $S_bP_b \parallel S_c\bar{P}_c$. Пошто важи $\mathcal{B}(S_b, A, S_c)$, из Талесове теореме следи да важи $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$ и $\frac{S_c\bar{P}_c}{S_bP_b} = \frac{AS_c}{AS_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$. Међутим, важи $S_bP_b = \rho_b$, па је $\frac{S_c\bar{P}_c}{\rho_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$, одакле закључујемо да је $S_c\bar{P}_c = \rho_c$, тј. $P'_c = \bar{P}_c$. Дакле, важи $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$.

Као што смо имали Ставове о подударности троуглова, постоје и Ставови о сличности троуглова. Што се тиче њихових формулација, имаћемо странице и углове, и то баш као код ставова о подударности (нпр. неке две и њима захваћен угао), с тим што имамо у виду да сличност чува *подударност углова* и *односе страница*.

Став 2. *Нека су дати троуглови* $\triangle ABC$ *и* $\triangle A'B'C'$. *Ако важи нешто од следећег:*
1° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$;
2° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$;
3° $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$;
4° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, *а углови* $\measuredangle ABC$ *и* $\measuredangle A'B'C'$ *су оба оштра, оба права или оба тупа;*
онда је $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Сада прелазимо на задатке из сличности. Први задатак је Теорема о симетрали угла. Ова теорема је веома важна и треба је знати, јер ће се користити и у даљим задацима (нпр. као што се средња линија користи у многим другим задацима).