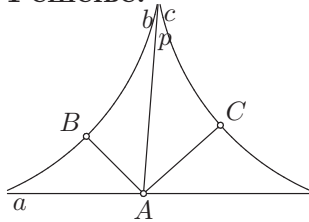


14. Нека су a, b и c међусобно паралелне праве, али не све у истом смеру. Нека су b' и c' управне из тачке A праве a на правима b и c . Одредити угао између правих b' и c' .

Решење:



Нека је Ap полуправа с теменом A која је паралелна правима b, c и нека су B, C редом подножја нормала из тачке A на правима b, c .

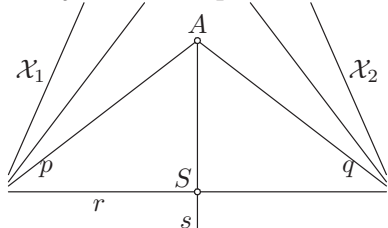
По дефиницији, углови које полуправа Ap и она полуправа праве a с теменом A , која је паралелна правој b , заклапају с полуправом AB јесу углови паралелности за дужину BA (јер су оне паралелне правој b из тачке A), па су међусобно подударни. Означимо их са φ .

Такође, по дефиницији, углови које полуправа Ap и она полуправа праве a с теменом A , која је паралелна правој c , заклапају с полуправом AC јесу углови паралелности за дужину CA (јер су оне паралелне правој c из тачке A), па су међусобно подударни. Означимо их са ψ .

Угао између правих b', c' је $\angle BAC = \varphi + \psi$, а пошто је $180^\circ = \varphi + \varphi + \psi + \psi = 2(\varphi + \psi)$, следи да је $\varphi + \psi = 90^\circ$. Према томе, праве b', c' су међусобно нормалне.

15. Два разна параболничка прамена имају заједничку праву. Доказати.

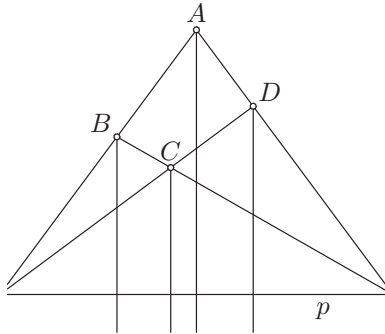
Решење: Нека су $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ два разна параболничка прамена. Нека је A произволна тачка у равни и нека је Ap полуправа која је паралелна свим правима прамена \mathcal{X}_1 и Aq полуправа која је паралелна свим правима прамена \mathcal{X}_2 . Ако полуправе Ap, Aq припадају једној правој r , онда је права r заједничка права тих двају праменова.



Ако полуправе Ap, Aq не припадају једној правој, нека је онда полуправа As бисектриса угла $\angle pAq$, S тачка бисектрисе As таква да је $AS = \Pi^{-1}(\angle sAp)$ и r права која садржи S и нормална је на As . Како је $\angle sAp = \Pi(SA)$ угао паралелности тачке A у односу на праву r , следи да је r паралелна полуправој Ap , па припада прамену \mathcal{X}_1 . Како је As бисектриса угла $\angle pAq$, следи да је $\angle sAp = \angle sAq$, па је $\angle sAq = \Pi(SA)$, што значи да је права r паралелна и полуправој Aq . Следи да права r припада прамену \mathcal{X}_2 , па је права r заједничка права тих двају праменова.

16. Нека су A, B, C, D тачке такве да су редом полуправе AB и DC , односно BC и AD паралелне. Доказати да су симетрале унутрашњих углова код темена A и C и спољашњих углова код темена B и D праве истог прамена.

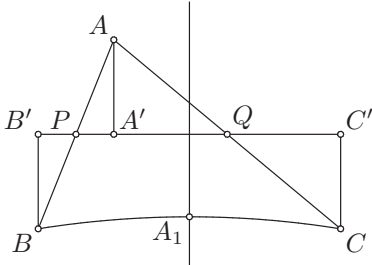
Решење:



Нека је \mathcal{X}_1 прамен правих које су паралелне полуправима AB, DC и нека је \mathcal{X}_2 прамен правих које су паралелне полуправима BC, AD . Праменови $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ су параболички, па на основу претходног задатка они имају заједничку праву p . Краци спољашњег угла код темена B су полуправе с теменом B паралелне правој p , па следи да је симетрала тог угла нормална на правој p . Такође, краци спољашњег угла код темена D су полуправе с теменом D које су паралелне правој p , па следи да је симетрала тог угла нормална на правој p . Полуправе AB, AD с теменом A су паралелне правој p , па је симетрала угла $\angle BAD$ (унутрашњег угла код темена A) нормална на правој p . Коначно, угао унакрсан углу $\angle BCD$ (унутрашњем углу код темена C) има краке који су полуправе с теменом C паралелне правој p , па је његова симетрала (која је уједно и симетрала унутрашњег угла код темена C) нормална на правој p . Дакле, све четири симетрале су нормалне на правој p , те припадају хиперболичком прамену правих чија је основица права p .

17. Доказати да за три неколинеарне тачке A, B, C важи $\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$.

Решење:



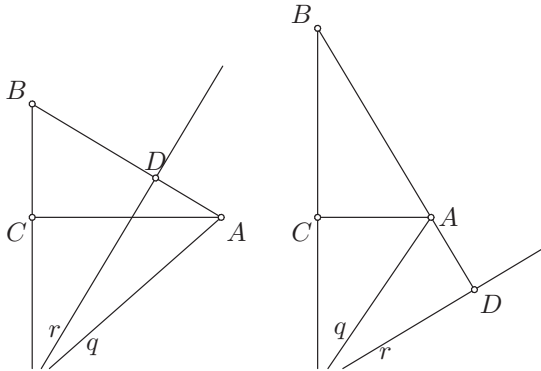
Нека су, као у 5. задатку, P, Q средишта страница AB, AC троугла $\triangle ABC$ и нека су A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој PQ . Нека је A_1 средиште странице BC и нека је m њена медијатриса. У 5. задатку смо доказали да је четвороугао $C'B'BC$ Сакеријев, па је медијатриса његове противосновице BC нормална на $B'C'$. Како је полуправа BB' хиперпаралелна медијатриси m , јер им је права $B'C'$ заједничка управна, по дефиницији угла паралелности следи да је $\Pi(A_1B) < \angle A_1BB'$. Дакле, $\Pi(\frac{BC}{2}) < \angle CBB'$. Треба још само израчунати угао $\angle CBB'$.

Јасно је да је $\angle CBB' = \angle CBP + \angle PBB'$ и $\angle CBB' = \angle BCC' = \angle BCQ + \angle QCC'$. У 5. задатку смо доказали да је $\angle PBB' = \angle PAA'$ и $\angle QCC' = \angle QAA'$. Следи да је

$$\begin{aligned} 2\angle CBB' &= \angle CBB' + \angle BCC' = \angle CBA + \angle PAA' + \angle BCA + \angle QAA' \\ &= \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC, \end{aligned}$$

па је $\angle CBB' = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$. Према томе, важи да је $\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$.

$$\text{б) } \angle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b) & , \text{ за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c) & , \text{ за } b' > c \end{cases}$$



Нека је Aq полуправа с теменом A која је паралелна полуправој BC . Тада је $\angle CAq = \Pi(CA) = \Pi(b)$. Нека је r права нормална на правој BA која је паралелна полуправима BC, Aq (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка). Нека је D пресечна тачка правих r, BA . Тада је, по дефиницији угла паралелности, $\angle DBC = \Pi(DB)$. Како је $\angle DBC = \angle ABC$, следи да је $DB = b'$.

Ако је $b' < c$, онда важи $\mathcal{B}(B, D, A)$, па је $DA = BA - BD = c - b'$. Следи да је $\angle DAq = \Pi(DA) = \Pi(c - b')$, па је $\angle A = \angle DAq - \angle CAq = \Pi(c - b') - \Pi(b)$.

Ако је $b' > c$, онда важи $\mathcal{B}(B, A, D)$, па је $DA = DB - AB = b' - c$. Следи да је $\angle DAq = \Pi(DA) = \Pi(b' - c)$. Како је $2R = \angle DAB = \angle DAq + \angle CAq + \angle CAB = \Pi(b' - c) + \Pi(b) + \angle A$, следи да је $\angle A = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$.

$$\text{в) } \angle A = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')] & , \text{ за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)] & , \text{ за } b' > c \end{cases}$$

Ако је $b' < c$, онда је $\angle A = \Pi(b) - \Pi(c + b') = \Pi(c - b') - \Pi(b)$, па је $2\angle A = \Pi(c - b') - \Pi(c + b')$, тј. $\angle A = \frac{1}{2}[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')]$.

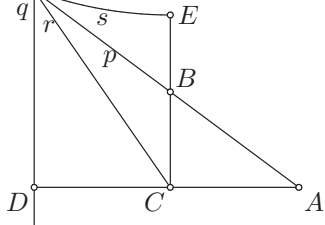
Ако је $b' > c$, онда је $\angle A = \Pi(b) - \Pi(b' + c) = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$, па је $2\angle A = 2R - \Pi(b' + c) - \Pi(b' - c)$, тј. $\angle A = R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)]$.

$$\text{г) } \Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')] & , \text{ за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' - c) - \Pi(b' + c)] & , \text{ за } b' > c \end{cases}$$

Ако је $b' < c$, онда је $\angle A = \Pi(b) - \Pi(c + b') = \Pi(c - b') - \Pi(b)$, па је $2\Pi(b) = \Pi(c + b') + \Pi(c - b')$, тј. $\Pi(b) = \frac{1}{2}[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')]$.

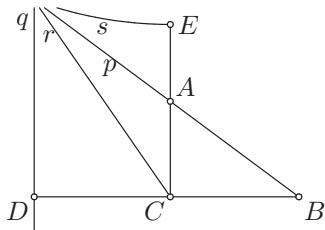
Ако је $b' > c$, онда је $\angle A = \Pi(b) - \Pi(b' + c) = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$, па је $2\Pi(b) = 2R - \Pi(b' - c) + \Pi(b' + c)$, тј. $\Pi(b) = R - \frac{1}{2}[\Pi(b' - c) - \Pi(b' + c)]$.

$$д) \quad \Pi(a' - b) + \Pi(a + b') = R, \quad \Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = R$$



Означимо полуправу AB још са Ap . Нека је q права која је нормална на правој AC и паралелна полуправој Ap (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка). Нека је D пресечна тачка правих q, AC . Како нормала CB сече полуправу Ap (у тачки B), следи да важи $\mathcal{B}(A, C, D)$. Тада је $\Pi(DA) = \angle DAp = \angle CAB$, па је $DA = a'$. Следи да је $DC = DA - CA = a' - b$.

Нека је Cr полуправа с теменом C која је паралелна полуправој Ap и правој q . Тада је $\angle DCr = \Pi(DC) = \Pi(a' - b)$. Нека је s права нормална на правој CB која је паралелна полуправима Ap, Cr (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка). Нека је E пресечна тачка правих CB, s . Како је $\angle EBp$ угао паралелности, он мора бити оштар, па важи $\mathcal{B}(C, B, E)$ и $\Pi(EB) = \angle EBp = \angle CBA$, тј. $EB = b'$. Дакле, $EC = EB + BC = b' + a$. Како је Cr паралелна са s , следи да је $\angle ECr = \Pi(EC) = \Pi(a + b')$. Коначно, како је $\angle DCE = R$, следи да је $R = \angle DCr + \angle ECr = \Pi(a' - b) + \Pi(a + b')$.



Потпуно аналогно се добија да важи $R = \Pi(b' - a) + \Pi(b + a')$.

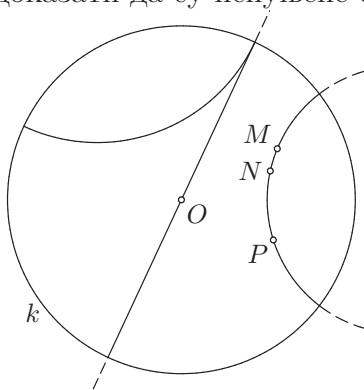
9 Поенкареов диск модел

Када се заснива нека математичка теорија (нпр. еуклидска или хиперболичка геометрија), полази се од основних појмова, а односи међу њима се исказују аксиомама. Основни појмови било које теорије су апстрактни. Да би неки конкретни објекти могли бити реализација основних појмова неке теорије, неопходно је установити да ли такви објекти задовољавају све аксиоме те теорије. Уколико је одговор потврдан, за те конкретне објекте се каже да представљају *модел* те теорије.

Основни појмови геометрије (и еуклидске и хиперболичке) јесу не-

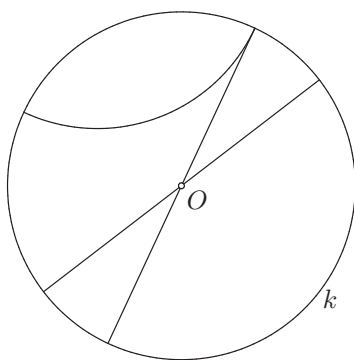
празан скуп \mathbf{S} , који се зове простор и чији су елементи тачке, две врсте подскупова простора \mathbf{S} , који се зову праве и равни, као и релације \mathcal{B} и \cong . При томе је релација \mathcal{B} тернарна над скупом тачака, а релација \cong је бинарна над скупом уређених парова тачака. Модел еуклидске геометрије је неки непразан скуп с јасно назначеним подскуповима који су праве и равни и јасно дефинисаним релацијама \mathcal{B} и \cong , уколико задовољавају све аксиоме инциденције, распореда, подударности и непрекидности, као и Плејферову аксиому. У овом поглављу нас интересује скуп који представља модел равни хиперболичке геометрије, при чему сматрамо да нам је дат неки модел еуклидске равни. Такав модел хиперболичке геометрије ћемо називати h -раван и све појмове назначиваћемо префиксом h .

Нека је k произвољан круг еуклидске равни и нека је O његов центар. Круг k се назива *апсолутом*, а његова унутрашњост (отворени диск) представља једну h -раван. Сама апсолута није у оквиру модела, тј. није део h -равни и сматра се да су на њој бесконачно далеке тачке. Тачке тог отвореног диска називамо h -тачкама. Отворене пречнике апсолуте, односно отворене тетиве круга k које садрже његов центар, као и отворене кружне лукове кругова који су управни на апсолути, чије су крајње тачке на апсолути, називамо h -правима. Дакле, h -праве су делови еуклидских правих ако садрже центар апсолуте, односно делови еуклидских кругова који су управни на апсолути, ако не садрже центар апсолуте. Може се доказати да су испуњене све аксиоме инциденције које се тичу равни.



Ако две разне h -тачке припадају h -правој која је део еуклидске праве, онда еуклидска дуж која их спаја представља уједно и h -дуж. Ако две разне h -тачке M, P припадају h -правој која је део еуклидског круга, онда краћи лук \widehat{MP} тог круга представља h -дуж MP . Три h -тачке M, N, P су у релацији h -између, тј. важи $\mathcal{B}_h(M, N, P)$, ако h -тачка N припада отвореној h -дужи MP . Може се доказати да су испуњене све аксиоме распореда. Помоћу релације h -између дефинисани су и појмови h -полуправих, h -углова, h -троуглова итд. Из аксиома непрекидности за

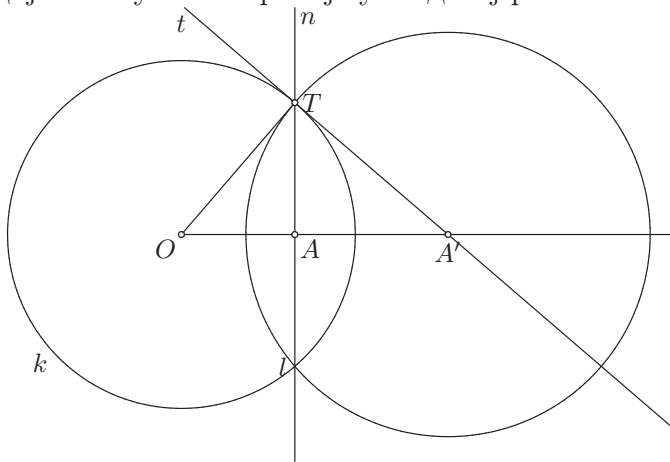
еуклидске праве и њихових последица за еуклидски круг следи да важе аксиоме непрекидности за h -праве. Може се доказати да у h -равни постоје h -права и h -тачка која јој не припада такве да постоји више од једне h -праве која садржи ту h -тачку, а с том h -правом нема заједничких тачака. Према томе, испуњена је и аксиома Лобачевског. Две h -праве су h -паралелне ако се додирују у тачки која припада апсолути. Ако су две h -праве дисјунктне и нису h -паралелне, онда су оне h -хиперпаралелне.



Преостаје још да се дефинише h -подударност парова h -тачака. За то је довољно дефинисати пресликавања h -равни у себе (пресликавања која сликају унутрашњост апсолуте k у себе) које ће представљати h -изометрије. Као што знамо, свака изометрија равни (било еуклидске, било хиперболичке) може се представити као композиција највише трију осних рефлексција, па је довољно дефинисати осне рефлексije h -равни, тј. h -рефлексije. Ако је h -права p део еуклидске праве (означимо је такође са p), дефинишимо h -рефлексiju \mathcal{S}_p^h као рестрикцију еуклидске осне рефлексije \mathcal{S}_p на тачке h -равни, односно на унутрашњост апсолуте k . Ако је, пак, h -права p део еуклидског круга (означимо га такође са p), дефинишимо h -рефлексiju \mathcal{S}_p^h као рестрикцију еуклидске инверзије ψ_p на тачке h -равни, односно на унутрашњост апсолуте k . Ово је сасвим природна дефиниција, јер је инверзија, на неки начин, рефлексija у односу на круг. Парови тачака $(A, B), (C, D)$ су h -подударни, односно важи $(A, B) \stackrel{h}{\cong} (C, D)$, ако постоји коначно много h -рефлексija $\mathcal{S}_{p_1}^h, \dots, \mathcal{S}_{p_n}^h$ таквих да је $C = \mathcal{S}_{p_n}^h \circ \dots \circ \mathcal{S}_{p_1}^h(A)$ и $D = \mathcal{S}_{p_n}^h \circ \dots \circ \mathcal{S}_{p_1}^h(B)$. Може се доказати да су испуњене све аксиоме подударности, према томе, имамо један модел хиперболичке равни, који се назива *Поенкареовим диск моделом*.

Што се мере дужи тиче, h -дужина h -дужи није једнака еуклидској дужини одговарајуће еуклидске дужи или еуклидског кружног лука. Пошто еуклидске осне рефлексije и еуклидске инверзије чувају еуклидске углове између кривих, следи да су два h -угла h -подударна ако и само ако су углови које граде одговарајући еуклидски кругови или еуклидске

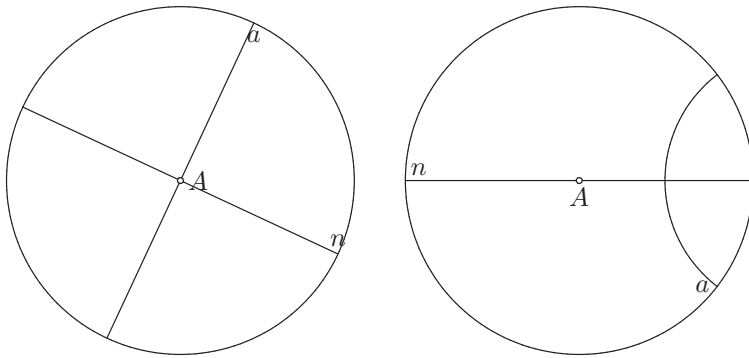
праве међусобно подударни. Није тешко доказати да је h -угао између неких h -правих прав ако и само ако је одговарајући угао између еуклидских кругова или еуклидских правих такође прав, па се h -мера h -углова у степенима или радијанима поклапа с мером углова у степенима или радијанима у посматраној еуклидској равни.



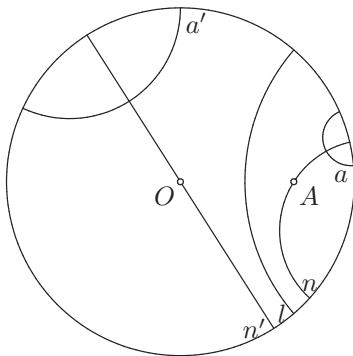
Веома је корисна чињеница да су h -праве које садрже центар апсолуте делови еуклидских правих, па је веома значајно за произвољну тачку A пронаћи h -изометрију која је слика у центар апсолуте O . Довољно је наћи h -рефлексију, јер знамо да нађемо слике тачака, еуклидских правих и еуклидских кругова при еуклидским рефлексијама и еуклидским инверзијама. Конструирамо еуклидску нормалу n на OA у тачки A , означимо једну од њених пресечних тачака са апсолутом са T и конструирамо тангенту t на апсолути k у тачки T . Њен пресек с полуправом OA означимо са A' . Круг $l(A', A'T)$ има особину да му центар припада тангенти апсолуте k , па је ортогоналан на апсолути, што значи да је његов пресек с унутрашњошћу апсолуте h -права, коју ћемо исто означити са l . Троуглови $\triangle A'AT$, $\triangle A'TO$ имају заједнички угао код темења A' и подударне праве углове $\angle A'AT$, $\angle A'TO$, па су слични. Следи да је $\frac{A'A}{A'T} = \frac{A'T}{A'O}$, тј. да је $A'A \cdot A'O = A'T^2$, па је $\psi_l(A) = O$, што значи да је и $\mathcal{S}_l^h(A) = O$. Овиме је одређена h -права l таква да се h -рефлексијом \mathcal{S}_l^h h -тачка A слика у центар апсолуте O . Ова конструкција нам је веома важна, јер ће се користити у већини задатака.

1. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h -права a и h -тачка A . Одредити h -праву n која садржи тачку A и управна је на праву a .

Решење:



1° Нека се h -тачка A поклапа с центром апсолуте. Тада h -права n коју треба да конструишемо садржи центар апсолуте, па је део еуклидске праве. Потребно је да она буде управна на h -правој a , па ако је h -права a део еуклидске праве, конструишемо еуклидску праву која садржи тачку A и нормална је на правој која садржи h -праву a , а ако је h -права a део еуклидског круга, конструишемо еуклидску праву која садржи тачку A и нормална је на кругу који садржи h -праву a , тј. еуклидску праву која садржи тачку A и центар круга који садржи h -праву a .

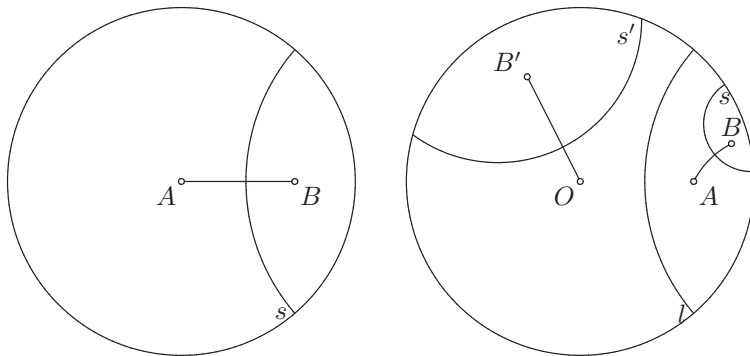


2° Нека се h -тачка A разликује од центра апсолуте O . Конструишемо h -праву l такву да се h -рефлексијом у односу на њу h -тачка A слика у центар апсолуте O (конструкција је описана у уводном делу). Конструишемо h -праву a' која је слика h -праве a при h -рефлексији у односу на h -праву l (слика еуклидске праве или круга при еуклидској инверзији). Дакле, h -рефлексијом у односу на h -праву l пресликали смо h -тачку A у центар апсолуте O и h -праву a у h -праву a' и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Према томе, конструишемо h -праву n'

која садржи h -тачку O и управна је на h -правој a' , као у првом случају. Пошто су h -рефлексије инволуције, поновном применом h -рефлексије у односу на h -праву l се h -тачка O и h -права a' сликају редом у h -тачку A и h -праву a , а пошто су h -рефлексије уједно и h -изометрије, применом h -рефлексије у односу на h -праву l се h -права n' слика у h -праву n која садржи h -тачку A и нормална је на h -правој a .

2. У Поенкареовом диск моделу дате су h -тачке A и B . Одредити h -симетралу дужи AB .

Решење: 1° Нека се једна од h -тачака A, B поклапа с центром апсолуте (нека је то, без умањења општости, h -тачка A). У уводном делу смо видели како се конструише h -права s таква да се h -рефлексијом у односу на њу h -тачка B слика у центар апсолуте A . Но, приметимо да је та h -права s управо h -симетрала h -дужи AB , те управо њу треба конструисати.

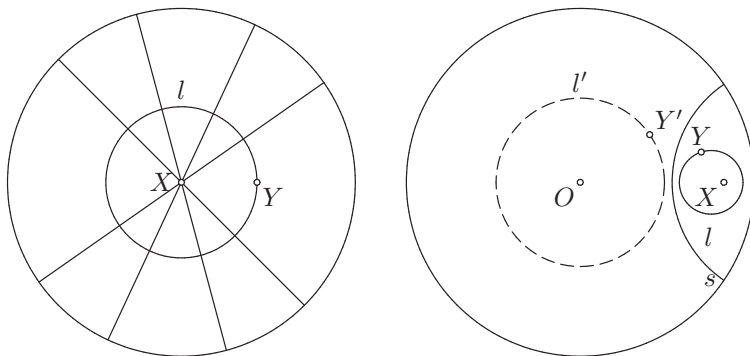


2° Нека се h -тачке A, B разликују од центра апсолуте O . Конструишимо h -симетралу l h -дужи OA и означимо са B' слику h -тачке B при h -рефлексији у односу на h -праву l (слика тачке при еуклидској инверзији). Дакле, h -рефлексијом у односу на h -праву l пресликали смо h -тачке A, B у центар апсолуте O и h -тачку B' и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Према томе, конструишимо h -симетралу s' h -дужи OB' . Поновном применом h -рефлексије у односу на h -праву l сликамо h -тачке O, B' у h -тачке A, B , а h -симетралу s' h -дужи OB' у h -симетралу s h -дужи AB .

3. У Поенкареовом диск моделу дате су тачке X и Y . Конструисати h -круг l са центром у тачки X који садржи тачку Y .

Решење: Ако је \mathcal{X} елиптички прамен правих са средиштем X , онда је круг s са центром X , који садржи тачку Y , епицикл одређен праменом \mathcal{X} и тачком Y , тј. скуп свих тачака које се од тачке Y добијају осним рефлексцијама у односу на праве прамена \mathcal{X} .

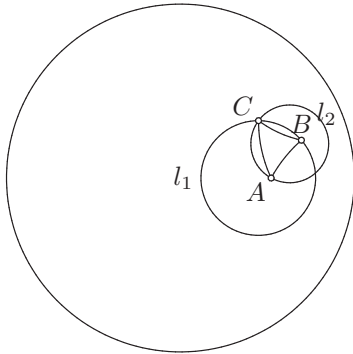
1° Нека се h -тачка X поклапа са центром апсолуте. Тада су h -праве елиптичког прамена \mathcal{X} са h -средиштем X делови еуклидских правих, па су h -рефлексције одређене h -правима прамена \mathcal{X} рестрикције еуклидских осних рефлексција. Тачке h -круга l се добијају h -рефлексцијама h -тачке Y у односу на h -праве прамена \mathcal{X} , тј. еуклидским осним рефлексцијама у односу на еуклидске праве прамена \mathcal{X} , па следи да се h -круг l поклапа са еуклидским кругом $l(X, XY)$.



2° Нека се h -тачка X разликује од центра апсолуте O . Конструирамо h -симетралу s h -дужи OX и затим означимо са Y' слику h -тачке Y при h -рефлексiji у односу на h -праву s . Дакле, h -рефлексijом у односу на h -праву s пресликали смо h -тачке X, Y у центар апсолуте O и h -тачку Y' и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Према томе, конструирамо h -круг l' са h -центром O који садржи h -тачку Y' . Поновном применом h -рефлексije у односу на h -праву s сликамо h -тачке O, Y' у h -тачке X, Y , а h -круг l' у h -круг l са h -центром X који садржи h -тачку Y .

4. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h -тачке A и B . Конструисати h -тачку C такву да је h -троугао ABC правилан.

Решење:

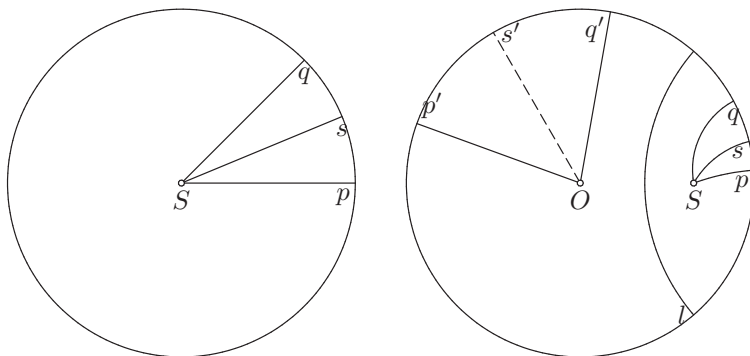


Искористимо решење претходног задатка и конструисимо h -круг l_1 с h -центром A који садржи h -тачку B и h -круг l_2 с h -центром B који садржи h -тачку A . Једну од пресечних h -тачака h -кругова l_1, l_2 означимо са C . Тада је h -троугао $\triangle ABC$ правилан, јер h -тачка C припада h -кругу l_1 , па важи $AC \stackrel{h}{\cong} AB$, а пошто припада и кругу l_2 , важи $BC \stackrel{h}{\cong} BA$ (у питању је h -подударност h -дужи).

5. У Поенкареовом диск моделу дате су две праве које се секу. Одредити h -бисектрису угла којег одређују.

Решење: Означимо са S пресек датих h -правих p, q .

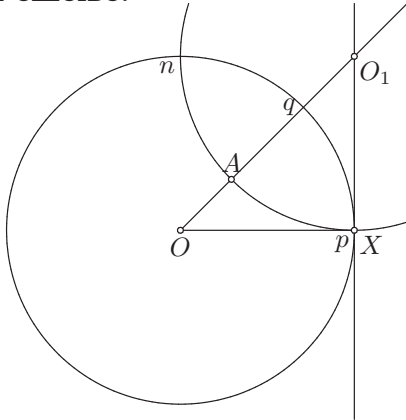
1° Нека се h -тачка S поклапа с центром апсолуте. Тада су h -праве p, q делови еуклидских правих и h -угао $\angle pSq$ се поклапа с еуклидским углом $\angle pSq$. Бисектриса угла је полуправа која припада том углу таква да се осном рефлексijом у односу на праву која је садржи један крак тог угла слика у други и обрнуто. Ако је Ss еуклидска бисектриса еуклидског угла $\angle pSq$, онда се еуклидском осном рефлексijом у односу на праву која је садржи крак Sp слика у крак Sq и обрнуто. Како h -рефлексija у односу на h -праву која садржи бисектрису Ss делује исто као и еуклидска осна рефлексija, следи да се и h -рефлексijом у односу на h -праву која садржи Ss h -крак Sp слика у h -крак Sq и обрнуто, односно да је h -полуправа Ss тражена h -бисектриса.



2° Претпоставимо сада да се h -тачка S разликује од центра апсолуте O . Конструирамо h -симетралу l h -дужи OS и означимо са p', q' слике h -правих p, q при h -рефлексiji у односу на h -праву l . Дакле, свели смо проблем на претходни, који унемо да решимо. Према томе, конструирамо h -бисектрису Os' h -угла $\angle p'Oq'$. Поновном применом h -рефлексije у односу на h -праву l сликамо h -праве p', q' у h -праве p, q , а h -бисектрису Os' h -угла $\angle p'Oq'$ у h -бисектрису Ss h -угла $\angle pSq$.

6. У Поенкареовом диск моделу конструисати h -дуж мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$.

Решење:



Потребан нам је h -угао $\frac{R}{2}$, па конструисамо h -угао $\angle pOq$ такав да му теме буде центар апсолуте (тада су му краци делови еуклидских правих). Да бисмо добили h -дуж h -мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$, потребна нам је h -права која је управна на једном h -краку тог h -угла (нпр. Oq), а h -паралелна с његовим другим h -краком (нпр. Op). Та h -права не може садржати центар апсолуте, јер онда неће бити паралелна ни са једном краком угла, па следи да мора припадати еуклидском кругу чији се (еуклидски) центар налази на еуклидској правој која садржи крак Oq . Тај еуклидски круг мора садржати тачку X у пресеку апсолуте и полуправе Op , да би h -права коју он садржи била h -паралелна с h -краком Op . Такође, тај круг мора бити управан на апсолути у тачки X , па следи да његов центар припада тангенти апсолуте у тачки X . Дакле, центар O_1 тог круга налази се у пресеку те тангенте и (еуклидске) полуправе Oq , па конструисамо круг $n(O_1, O_1X)$. Означимо са A h -тачку у пресеку h -праве n и h -крака Oq . Тада је OA h -дуж која је, по дефиницији функције Лобачевског, h -мере $\Pi^{-1}(\angle AOp) = \Pi^{-1}(\angle pOq) = \Pi^{-1}(\frac{R}{2})$.