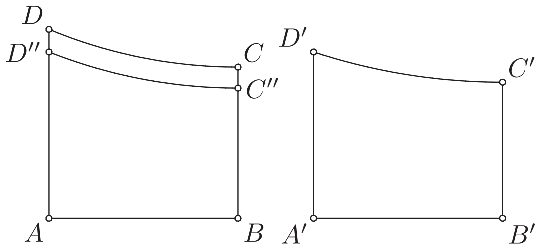
ђ) $AB = A'B'$, $\measuredangle D = \measuredangle D'$



Претпоставимо да је $AD \neq A'D'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AD > A'D'$. На дужи AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' = A'D'$. Нека је C'' подножје нормале из D'' на правој BC.

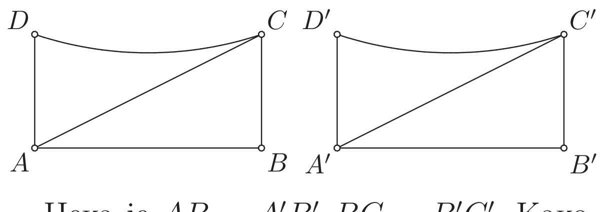
Четвороугао $ABC''D''$ је Ламбертов, с оштрим углом код темена D'' и важи $AB = A'B', AD'' = A'D'$. На основу дела **б)** следи да су четвороуглови $ABC''D'', A'B'C'D'$ подударни, па је $\measuredangle AD''C'' = \measuredangle A'D'C' = \varphi$, па је $\measuredangle C''D''D = 180^\circ - \varphi$. По претпоставци, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне углове код темена D, D', па је $\measuredangle D''DC = \varphi$. Дакле, збир углова четвороугла $D''C''CD$ је $180^\circ - \varphi + 90^\circ + 90^\circ + \varphi = 360^\circ$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AD \neq A'D'$ је погрешна, па је $AD = A'D'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', AD = A'D'$, на основу дела **б)** следи да су они међусобно подударни.

4. Доказати да су два Сакеријева четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са основама AB и $A'B'$ подударна ако је:

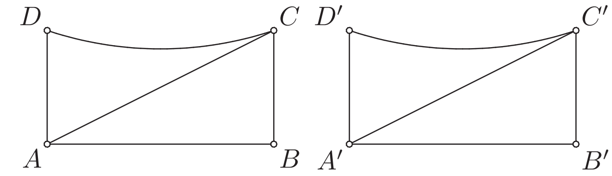
а) $AB = A'B',\ BC = B'C'$;	**г)** $AB = A'B',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$;
б) $AB = A'B',\ CD = C'D'$;	**д)** $BC = B'C',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$;
в) $BC = B'C',\ CD = C'D'$;	**ђ)** $CD = C'D',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$.

Решење: а) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$



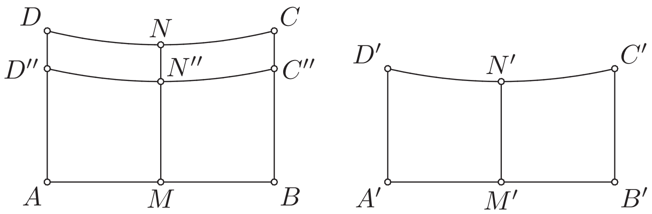
Нека је $AB = A'B', BC = B'C'$. Како је и $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ (прави углови), према ставу СУС следи да је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Према томе, $AC = A'C'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C' = \varphi$ и $\measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A' = \psi$. Углови $\measuredangle DAB, \measuredangle D'A'B'$ су прави, па следи да је $\measuredangle DAC = 90^\circ - \varphi = \measuredangle D'A'C'$. Такође, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ су Сакеријеви, па је $AD = BC$

и $A'D' = B'C'$, па важи $AD = A'D'$. Дакле, према ставу СУС следи да је $\triangle DAC \cong \triangle D'A'C'$, па следи да је $CD = C'D'$, $\measuredangle ADC = \measuredangle A'D'C'$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle A'C'D' = \theta$. Према томе, $\measuredangle BCD = \psi + \theta = \measuredangle B'C'D'$, па четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне странице и углове. Следи да су они међусобно подударни.



б) $AB = A'B'$, $CD = C'D'$

Претпоставимо да је $BC \neq B'C'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $BC > B'C'$. Тада на дужи BC постоји тачка C'' таква да је $BC'' = B'C'$. Пошто је $AD = BC$ и $A'D' = B'C'$, на дужи AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' = A'D'$.

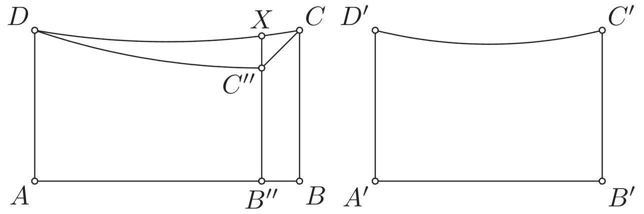


Четвороуглови $ABC''D'', A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице $AB, A'B'$ такви да је $AB = A'B', BC'' = B'C'$, па су на основу дела **а)** ови четвороуглови подударни. Следи да је $C''D'' = C'D' = CD$. Нека су M, N, N'' редом средишта страница $AB, CD, C''D''$. Права MN је заједничка нормала правих AB, CD, а права MN'' је заједничка нормала правих $AB, C''D''$. Пошто у тачки M постоји јединствена нормала на правој AB, следи да су тачке M, N, N'' колинеарне, па је NN'' заједничка нормала правих $CD, C''D''$. Четвороугао $N''NDD''$ је Сакеријев, јер је $N''D'' = \frac{1}{2}C''D'' = \frac{1}{2}CD = ND$ и $D''N'', DN \perp N''N$, па су углови $\measuredangle NDD'', \measuredangle N''D''D$ подударни и оштри. Међутим, и угао $\measuredangle AD''N''$ је оштар, па је $180^\circ = \measuredangle AD''N'' + \measuredangle N''D''D < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $BC \neq B'C'$ је погрешна, па је $BC = B'C'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

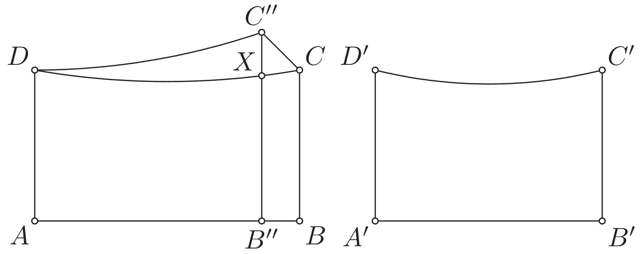
в) $BC = B'C'$, $CD = C'D'$

Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n права која је у тачки B'' нормална на AB и нека је C'' тачка праве n таква да је $D, C'' \stackrel{\cdot\cdot}{-} AB$ и $B''C'' = B'C'$.



Четвороуглови $AB''C''D, A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице $AB'', A'B'$, такви да је $AB'' = A'B', B''C'' = B'C'$, па су на основу дела **а)** ови четвороуглови подударни. Следи да је $C''D = C'D' = CD$. Права n сече дуж CD. Заиста, права n сече дуж AB у тачки B'' и не сече BC (јер су n, BC хиперпаралелне), па на основу Пашове аксиоме, права n сече дуж AC. Пошто n не сече ни дуж AD (јер су n, AD хиперпаралелне), на основу Пашове аксиоме n сече дуж CD у некој тачки X. Дакле, важи $D, X \stackrel{\cdot\cdot}{-} AB$, па пошто важи $D, C'' \stackrel{\cdot\cdot}{-} AB$, следи да важи $X, C'' \stackrel{\cdot\cdot}{-} AB$. Тачка X се разликује од тачке C'', јер би се у супротном због $DC'' = DC$ тачке C'', C поклапале, па би из те тачке постојале две различите нормале на правој AB. Према томе, важи $\mathcal{B}(B'', C'', X)$ или $\mathcal{B}(B'', X, C'')$.

Нека важи $\mathcal{B}(B'', C'', X)$. Троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle DC''C$ и $\measuredangle DCC''$ подударни и оштри. Четвороуглови $B''BCC''$ и $AB''C''D$ су Сакеријеви, јер су $AD, B''C'', BC \perp AB$ и $AD = BC = B'C' = B''C''$, па су углови $\measuredangle B''C''C, \measuredangle B''C''D$ оштри. Следи да је $360^\circ = \measuredangle DC''C + \measuredangle CC''B'' + \measuredangle B''C''D < 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$, што је немогуће.

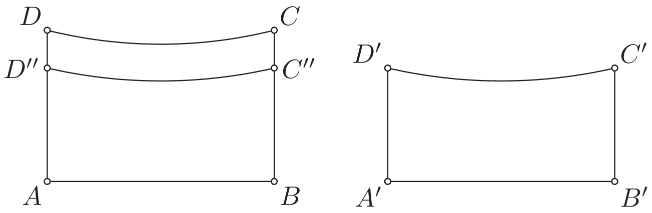


Нека важи $\mathcal{B}(B'', X, C'')$. Троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle DC''C$ и $\measuredangle DCC''$ подударни и оштри. Четвороугао $B''BCC''$ је Сакеријев, јер је $B''C'' = B'C' = BC$ и $B''C'', BC \perp B''B$, па су углови $\measuredangle B''C''C$ и $\measuredangle BCC''$ подударни и оштри. Међутим, онда следи да је $\measuredangle DC''C > \measuredangle B''C''C = \measuredangle BCC'' > \measuredangle DCC'' = \measuredangle DC''C$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

г) $AB = A'B'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$

Претпоставимо да је $BC \neq B'C'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $BC > B'C'$. Тада на дужи BC постоји тачка C'' таква да је $BC'' = B'C'$ и на дужи AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' = A'D' = B'C'$.

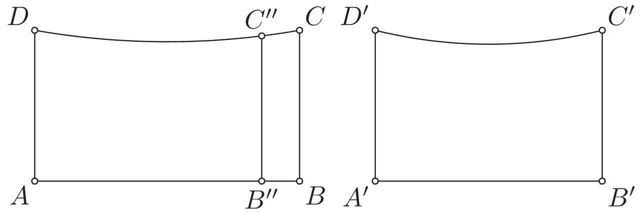


Четвороуглови $ABC''D'', A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице $AB, A'B'$ такви да је $AB = A'B', BC'' = B'C'$, па су на основу дела **а)** ови четвороуглови подударни. Следи да је $\measuredangle D''C''B = \measuredangle D'C'B' = \measuredangle DCB$, па је $\measuredangle D''C''C = \pi - \measuredangle DCB$. Слично је и $\measuredangle C''D''D = \pi - \measuredangle DCB$. Међутим, збир углова четвороугла $D''C''CD$ је $\measuredangle DD''C'' + \measuredangle D''C''C + \measuredangle C''CD + \measuredangle CDD'' = 2(\pi - \measuredangle DCB) + 2\measuredangle DCB = 2\pi$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $BC \neq B'C'$ је погрешна, па је $BC = B'C'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

д) $BC = B'C'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$

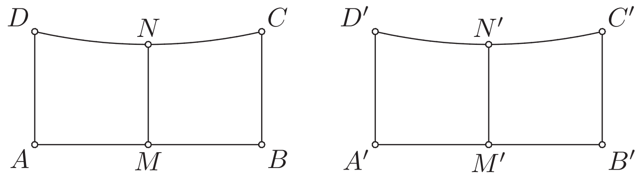
Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки B'' и нека је C'' тачка нормале n таква да је $C, C'' \,\ddot{-}\, AB$ и $B''C'' = B'C' = BC$.



Четвороуглови $AB''C''D, A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице $AB'', A'B'$ такви да је $AB'' = A'B', B''C'' = B'C'$, па су на основу дела **а)** ови четвороуглови подударни. Такође, углови код темена D, D' четвороуглова $ABCD, A'B'C'D'$ су подударни, па следи да је $\measuredangle ADC'' = \measuredangle A'D'C' = \measuredangle ADC$. Дакле, тачка C'' припада дужи DC. Међутим, и четвороугао $B''BCC''$ је Сакеријев, па је $\measuredangle B''C''C = \measuredangle BCC'' = \measuredangle BCD = \measuredangle B''C''D$. Ови углови су оштри, јер су углови на противосновици Сакеријевог четвороугла оштри. Међутим, како су напоредни углови $\measuredangle DC''B''$, $\measuredangle B''C''C$ подударни, следи да су то прави углови, па су ови углови истовремено и оштри и прави, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

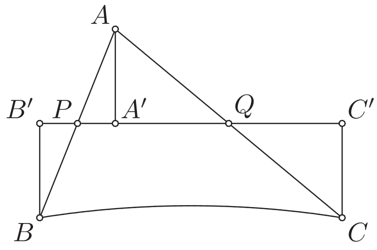
ђ) $CD = C'D'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$



Нека су M, N и M', N' средишта страница AB, CD и $A'B', C'D'$ четвороуглова $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Тада су $NMBC, N'M'B'C'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена C, C' и важи $NC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}D'C' = N'C'$ и $\measuredangle C = \measuredangle C'$. На основу дела **д)** претходног задатка следи да су четвороуглови $NMBC, N'M'B'C'$ подударни. Одавде следи да је $BC = B'C'$, па на основу дела **д)** овог задатка следи да су четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ подударни.

5. Ако су тачке P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC, доказати да су праве BC и PQ међу собом хиперпаралелне.

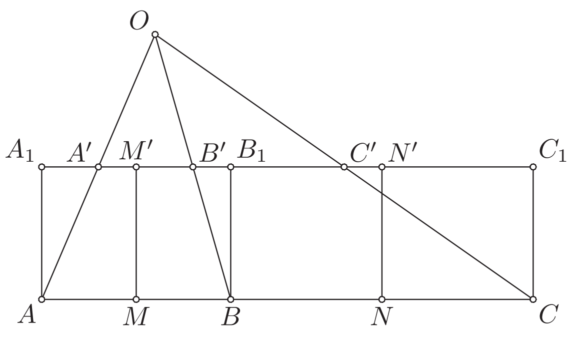
Решење:



Нека су A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој PQ. За троуглове $\triangle BPB'$ и $\triangle APA'$ важи $BP = AP$, $\measuredangle BPB' = \measuredangle APA'$ као унакрсни углови и $\measuredangle BB'P = \measuredangle AA'P = 90°$, па су ови троуглови подударни. Следи да је $BB' = AA'$. Слично, троуглови $\triangle AQA'$ и $\triangle CQC'$ су подударни, јер је $AQ = CQ$, $\measuredangle AQA' = \measuredangle CQC'$ као унакрсни углови и $\measuredangle AA'Q = \measuredangle CC'Q = 90°$. Следи да је $AA' = CC'$, па имамо да је $BB' = CC'$. Како је $BB', CC' \perp B'C'$, следи да је четвороугао $B'BCC'$ Сакеријев, па су његова основица $B'C'$ и противосновица BC хиперпаралелне, на основу 1. задатка. Дакле, праве PQ и BC су хиперпаралелне.

6. Ако су A, B, C три разне тачке неке праве l и O тачка изван те праве, доказати да средишта A', B', C' дужи OA, OB, OC не припадају једној правој.

Решење:

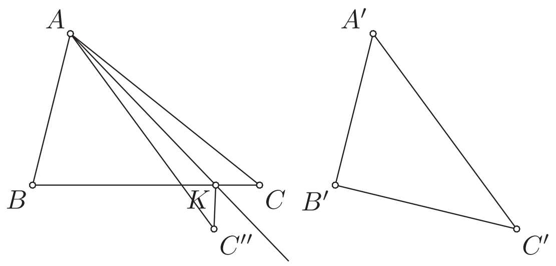


Претпоставимо да тачке A', B', C' припадају правој l'. Нека су A_1, B_1, C_1 редом подножја нормала из A, B, C на правој l'. На основу претходног задатка, четвороуглови A_1ABB_1, B_1BCC_1 су Сакеријеви, па ако са M, N означимо средишта страница AB, BC, а са M', N' средишта страница A_1B_1, B_1C_1, на основу теореме 49 следи да су MM', NN' нормалне на правима l, l'. Међутим, то није могуће, јер је онда збир углова простог, равног четвороугла $MNN'M'$ једнак $4 \cdot 90° = 360°$.

Дакле, претпоставка да тачке A', B', C' припадају једној правој је погрешна, па тачке A', B', C' не припадају једној правој.

Подсетимо се става 5, који је наведен у глави 6. Овај став важи и у еуклидској и у хиперболичкој геометрији.

Став 5. *Нека су $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ троуглови такви да је $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$. Тада је $BC > B'C'$ ако и само ако је $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$.*



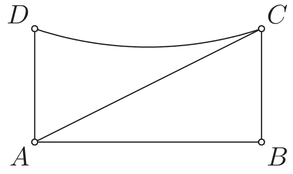
Доказ: $\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$. Означимо са C'' тачку такву да је $AC'' = A'C' = AC$ и $\measuredangle BAC'' = \measuredangle B'A'C'$. На основу става СУС важи $\triangle ABC'' \cong \triangle A'B'C'$, па је $BC'' = B'C'$. Пошто је $\measuredangle BAC'' < \measuredangle BAC$, полуправа AC'' сече дуж BC. Ако је пресечна тачка управо тачка C'', очигледно се добија да је $BC > BC'' = B'C'$. Претпоставимо зато да тачка C'' не припада правој BC.

Означимо са K пресечну тачку бисектрисе угла $\measuredangle C''AC$ и дужи BC. На основу става СУС важи $\triangle AKC \cong \triangle AKC''$ ($AK = AK$, $AC = AC''$ и $\measuredangle CAK = \measuredangle C''AK$ јер је AK бисектриса угла $\measuredangle C''AC$), па је $CK = C''K$. Закључујемо да је $BC = BK + KC = BK + KC'' > BC'' = B'C'$, на основу неједнакости троугла.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $BC > B'C'$. Не може бити $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, јер би на основу става СУС било $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, па због тога и $BC = B'C'$. Такође, не може бити ни $\measuredangle BAC < \measuredangle B'A'C'$, јер би, на основу смера $\boxed{\Longleftarrow}$ било $B'C' > BC$. Према томе, мора бити $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$. $\square$

7. Доказати да је у Сакеријевом четвороуглу противосновица већа од основице.

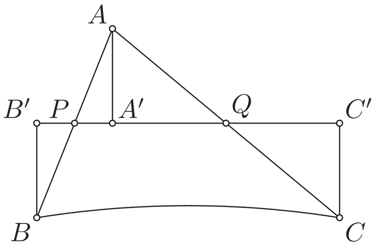
Решење:



Посматрајмо троуглове $\triangle ACB$ и $\triangle CAD$. Пошто важи $CB = AD$ и $AC = CA$, на основу става 5 треба установити у каквом су односу углови $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle CAD$. Како важи да је $\measuredangle BAC + \measuredangle CAD = \measuredangle BAD = 90°$ и $\measuredangle BAC + \measuredangle ACB + \measuredangle CBA < 180°$, следи да је $\measuredangle CAD = 90° - \measuredangle BAC$ и $\measuredangle ACB < 180° - 90° - \measuredangle BAC = 90° - \measuredangle BAC$. Дакле, $\measuredangle ACB < \measuredangle CAD$, па према ставу 5 следи да је $AB < CD$, тј. да је основица Сакеријевог четвороугла мања од његове противосновице.

8. Ако су P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC, доказати да је $PQ < \frac{1}{2}BC$.

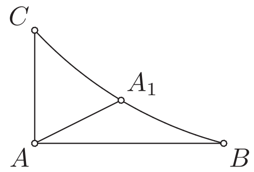
Решење:



Нека су, као у 5. задатку, A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој PQ. У 5. задатку смо доказали да је $B'BCC'$ Сакеријев четвороугао с основицом $B'C'$ и противосновицом BC. На основу 7. задатка следи да је $BC > B'C'$. Такође, у 5. задатку смо доказали да је $\triangle BPB' \cong \triangle APA'$ и $\triangle AQA' \cong \triangle CQC'$, па је $B'P = A'P$ и $A'Q = C'Q$. Следи да је $B'C' = B'P + PA' + A'Q + QC' = 2PA' + 2A'Q = 2PQ$, па је $PQ = \frac{1}{2}B'C' < \frac{1}{2}BC$.

9. Нека је A_1 средиште хипотенузе BC правоуглог троугла ABC. Доказати да је дуж AA_1 мања од половине хипотенузе.

Решење:



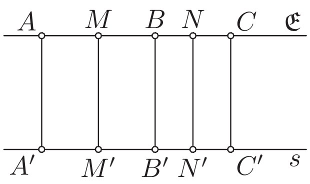
Претпоставимо да је $AA_1 \geq \frac{1}{2}BC$. Тада је $AA_1 \geq A_1B$, па је на основу неједнакости троугла $\measuredangle ABA_1 \geq \measuredangle BAA_1$. Такође, тада је $AA_1 \geq A_1C$, па је на основу неједнакости троугла $\measuredangle ACA_1 \geq \measuredangle CAA_1$. Према томе, следи да је $\measuredangle ABA_1 + \measuredangle ACA_1 \geq \measuredangle BAA_1 + \measuredangle CAA_1 = \measuredangle BAC = 90°$. Међутим, $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 90° + \measuredangle ABA_1 + \measuredangle ACA_1 \geq 90° + 90° = 180°$, што је немогуће, јер је у хиперболичкој геометрији збир углова троугла мањи од $180°$.

Дакле, претпоставка да је $AA_1 \geq \frac{1}{2}BC$ је погрешна, па је $AA_1 < \frac{1}{2}BC$, тј. дуж AA_1 је мања од половине хипотенузе.

Напомена 15. Овим је доказано да ако постоји центар описаног круга правоуглог троугла $\triangle ABC$, онда он није средиште његове хипотенузе.

10. Ако је висина еквидистанте већа од нуле тада та еквидистанта није права. Доказати.

Решење:

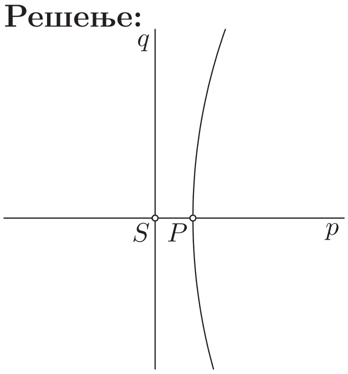


Претпоставимо да је еквидистанта $\mathfrak{E}$, чија је основица права s и висина h већа од нуле, права. Нека су A, B, C произвољне тачке еквидистанте $\mathfrak{E}$ и A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на основици s те еквидистанте. Тада је $AA' = BB' = CC' = h$, па су четвороуглови $A'B'BA, B'C'CB$ Сакеријеви. На основу теореме 49, ако са M, N редом означимо средишта страница AB, BC и са M', N' редом средишта страница $A'B', B'C'$, следи да су праве MM', NN' нормалне на правима $s, \mathfrak{E}$. Међутим, тада је збир углова простог, равног четвороугла $MNN'M'$ једнак $4 \cdot 90° = 360°$, што је немогуће.

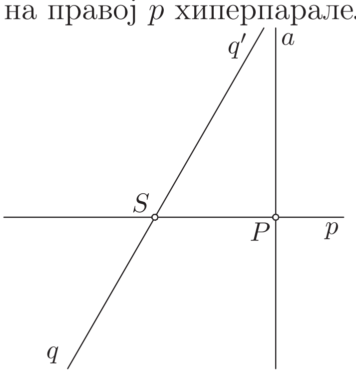
Дакле, претпоставка да је еквидистанта $\mathfrak{E}$, чија је висина већа од нуле, права, није тачна, па еквидистанта $\mathfrak{E}$, чија је висина већа од нуле, није права.

11. Праве p и q секу се у тачки S. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p.

Решење:



Ако су праве p, q међусобно нормалне, онда је свака права нормална на правој p хиперпаралелна правој q, па тражена права a не постоји.

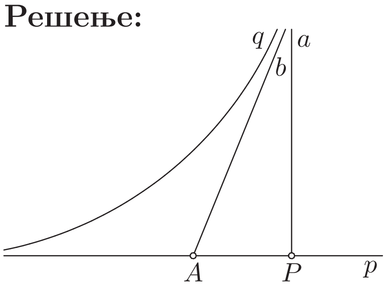


Нека се p, q секу у тачки S и нека нису међусобно нормалне. Претпоставимо да је права a нормална на правој p у тачки P и да је паралелна правој q у одређеном смеру. Нека је Sq' она полуправа праве q с теменом S која је паралелна правој a. По дефиницији, угао $\measuredangle PSq'$ је угао паралелности тачке S у односу на праву a, тј. важи $\measuredangle PSq' = \Pi(SP)$, односно $SP = \Pi^{-1}(\measuredangle PSq')$. Угао $\measuredangle PSq'$ је оштар угао који граде праве p, q.

Нека је са φ означен оштар угао који граде праве p, q. Конструише се дуж $d = \Pi^{-1}(\varphi)$. Затим се на правој p означе тачке P_1, P_2 такве да је $SP_1 = SP_2 = d$, а затим се конструишу нормале a_1, a_2 на правој p у тачкама P_1, P_2.

12. Праве p и q су паралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p.

Решење:

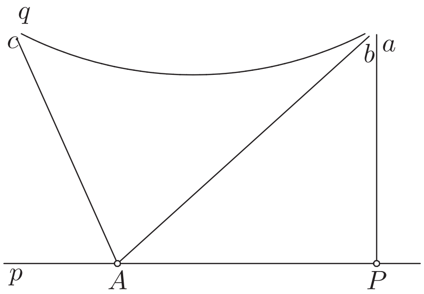


Претпоставимо да је права a нормална на правој p у тачки P и да је паралелна правој q у одређеном смеру. Нека је A произвољна тачка праве p и нека је Ab полуправа с теменом A која је паралелна правима q, a (и није садржана у правој p). Ако се тачке A, P поклапају, онда права a садржи полуправу Ab, па је $Ab \perp p$. Ако се не поклапају, онда је $AP = \Pi^{-1}(\measuredangle PAb)$.

На правој p се означи произвољна тачка A. Затим се конструише полуправа Ab која је паралелна правој q и није садржана у правој p. Ако важи $Ab \perp p$, онда се са a означи права која садржи полуправу Ab. Ако важи $Ab \not\perp p$, онда је један од углова који полуправа Ab гради с правом p оштар, а други је туп. Означимо са φ онај који је оштар. Нека је $d = \Pi^{-1}(\varphi)$. Са P се означи тачка праве p таква да је $AP = d$ и да је $\measuredangle PAb = \varphi$, односно да полуправа AP буде она полуправа која с полуправом Ab гради оштар угао φ. Затим се конструише нормала a на правој p у тачки P.

13. Праве p и q су хиперпаралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p.

Решење:



Претпоставимо да је права a нормална на правој p у тачки P и да је паралелна правој q у одређеном смеру. Нека је A произвољна тачка праве p и нека је Ab полуправа с теменом A која је паралелна правима q, a. Ако се тачке A, P поклапају, онда права a садржи полуправу Ab, па је $Ab \perp p$. Ако се не поклапају, онда је $AP = \Pi^{-1}(\measuredangle PAb)$.

На правој p се означи произвољна тачка A и конструишу се полуправе Ab, Ac с теменом A које су паралелне правој q. Ако важи $Ab \perp p$, онда се са a_1 означи права која садржи полуправу Ab. Ако важи $Ab \not\perp p$, онда је један од углова који полуправа Ab гради с правом p оштар, а други је туп. Означимо са φ онај који је оштар. Нека је $d_1 = \Pi^{-1}(\varphi)$. Са P_1 се означи тачка праве p таква да је $AP_1 = d_1$ и да је $\measuredangle P_1Ab = \varphi$, односно да полуправа AP_1 буде она полуправа која с полуправом Ab гради оштар угао φ. Затим се конструише нормала a_1 на правој p у тачки P_1. Аналоган поступак се примењује и за полуправу Ac. Ако важи $Ac \perp p$, онда се са a_2 означи права која садржи полуправу Ac. Ако важи $Ac \not\perp p$, онда је један од углова који полуправа Ac гради с правом p оштар, а други је туп. Означимо са ψ онај који је оштар. Нека је $d_2 = \Pi^{-1}(\psi)$. Са P_2 се означи тачка праве p таква да је $AP_2 = d_2$ и да је $\measuredangle P_2Ac = \psi$, односно да полуправа AP_2 буде она полуправа која с полуправом Ac гради оштар угао ψ. Затим се конструише нормала a_2 на правој p у тачки P_2.