

# Геометрија 2

- вежбе -

# 1 Подударност

Подсетимо се ставова о подударности троуглова. Јасно нам је да два подударна троугла имају међусобно подударне одговарајуће странице и углове. Обратно, за два троугла  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$  довољно је доказати само за нека три пара страница или углова да су подударни. Ставови који се доказују у теорији и који дају ове довољне услове за подударност два троугла зову се Ставови о подударности троуглова. Има их пет и сада ћемо их навести.

**Став 1.** Нека су даћи троуглови  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$ . Ако важи нешто од следећег:

1° (СУС)  $AB = A'B'$ ,  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ,  $AC = A'C'$ ;

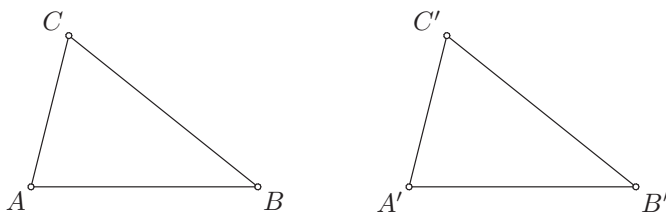
2° (ССС)  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $BC = B'C'$ ;

3° (УСУ)  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ,  $AB = A'B'$ ,  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ;

4° (ССУ)  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $\angle ACB = \angle A'C'B'$ , а улови  $\angle ABC$  и  $\angle A'B'C'$  су оба оштра, оба права или оба тупа;

5° (УУС)  $AB = A'B'$ ,  $\angle ACB = \angle A'C'B'$ ,  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ;

онда је  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .



Дакле, сваки од ставова 1°–5° еквивалентан је са подударношћу троуглова  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$ .

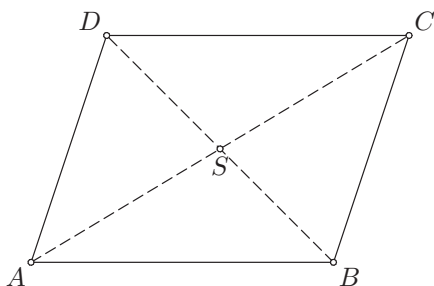
Приметимо да код троуглова не можемо тек тако писати знак „=” уместо знака „ $\cong$ ”. Код дужи и углова се то може толерисати, јер се ту уместо једнакости скупова тачака мисли на једнакост дужина дужи, односно мера углова. Међутим, одговарајућа мера за троуглове је површина, а два троугла која имају исту површину не морају бити подударна.

Вратимо се сада на Ставови о подударности троуглова. На први поглед нам се може учинити да су ставови УСУ и УУС исти, јер уколико су нама позната нека два угла троугла, познат нам је и трећи због тога што је збир углова у троуглу једнак  $180^\circ$ , односно  $\pi$ . Но, на овом предмету се изучавају две геометрије, еуклидска и хиперболичка. Еуклидска геометрија је стандардна, уобичајена геометрија с којом се сусрећемо још у основној школи, а о хиперболичкој геометрији ћемо учити касније. За сада ћемо рећи да се испоставља да ће у хиперболичкој геометрији збир

углова у троуглу увек бити мањи од  $\pi$  и да тај збир може бити било који број између 0 и  $\pi$ .

Осим ставова о подударности троуглова, користићемо једно веома важно тврђење везано за паралелограм. Најпре дајмо дефиницију паралелограма.

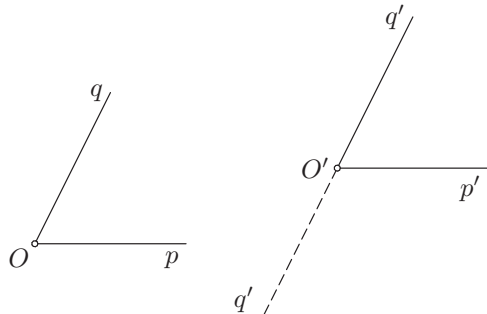
**Дефиниција 1.** Четвороугао  $ABCD$  је *паралелограм* ако је  $AB \parallel CD$  и  $AD \parallel BC$ .



**Теорема 1.** Нека је у равни даи конвексан четвороугао  $ABCD$ . Следећа тврђења су еквивалентна.

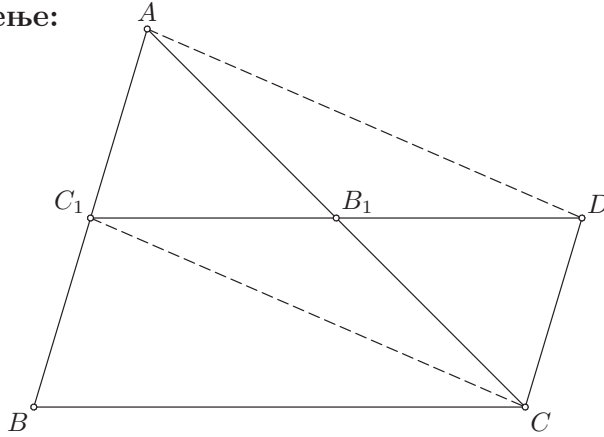
- 1° Четвороугао  $ABCD$  је паралелограм.
- 2° Свака два суседна угла четвороугла  $ABCD$  су суплементна.
- 3° Парови насупрамних угла четвороугла  $ABCD$  су парови подударних угла.
- 4°  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD$
- 5°  $AB = CD$  и  $AD = BC$
- 6° Дијагонале  $AC$  и  $BD$  имају заједничко средиште.

**Теорема 2** (Углови са паралелним крацима). Нека су  $\angle pOq$  и  $\angle p'O'q'$  такви да је  $Op \parallel O'p'$  и  $Oq \parallel O'q'$ . Тада је  $\angle pOq = \angle p'O'q'$  или  $\angle pOq + \angle p'O'q' = \pi$ .



**1. (Средња линија троугла)** Ако су  $B_1$  и  $C_1$  средишта дужи  $CA$  и  $BA$  троугла  $ABC$ , онда су праве  $BC$  и  $B_1C_1$  паралелне и важи  $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$ .

**Решење:**



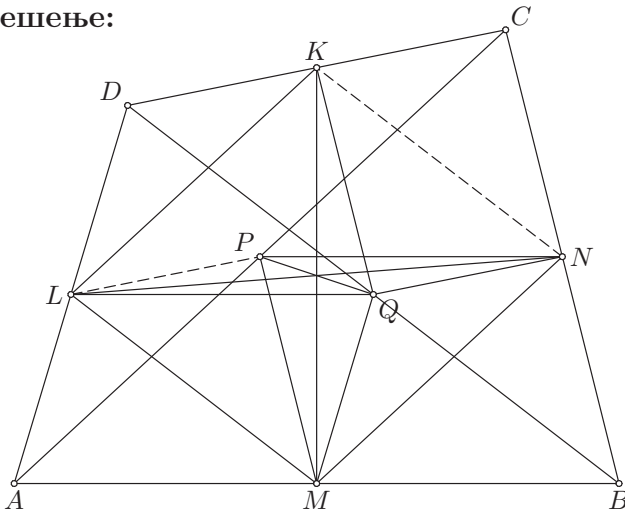
Нека је  $D$  тачка на полуправој  $C_1B_1$  таква да је  $C_1B_1 = B_1D$ . Тада је тачка  $B_1$  средиште дијагонала  $AC$  и  $C_1D$  четвороугла  $AC_1CD$ , те је он паралелограм. Следи да је  $AC_1 \parallel CD$  и да је  $AC_1 = CD$  као наспрамне стране паралелограма. Како је  $AC_1 = C_1B$  јер је  $C_1$  средиште  $AB$ , имамо да је  $C_1B = CD$ , а како су праве  $AC_1$  и  $C_1B$  исте, следи да је и  $C_1B \parallel CD$ . Одавде закључујемо да је четвороугао  $BCDC_1$  паралелограм, па имамо да је  $BC \parallel C_1D$  и  $BC = C_1D$ . Како имамо да су праве  $C_1B_1$  и  $C_1D$  исте, следи да је  $C_1B_1 \parallel BC$ , а како је  $B_1$  средиште  $C_1D$ , следи да је  $C_1B_1 = \frac{1}{2}C_1D = \frac{1}{2}BC$ , што је и требало доказати.

**Дефиниција 2.** Дуж која повезује средишта две стране троугла  $ABC$  зове се *средња линија* троугла  $\triangle ABC$ .

2. Ако су  $A, B, C, D$  четири различите тачке и  $M, N, K, L, P, Q$  средишта дужи  $AB, BC, CD, DA, AC, DB$  редом, доказати:

- а)  $MN$  и  $KL$ ,  $MP$  и  $QK$ ,  $NP$  и  $QL$  су међусобно подударне дужи;
- б) дужи  $LN, MK, PQ$  имају заједничко средиште;
- в) сваки од углова  $\angle PMQ, \angle PNQ, \angle LMN$  подударан је једном од углова којег одређују праве  $BC$  и  $AD, AB$  и  $CD, AC$  и  $BD$ .

**Решење:**

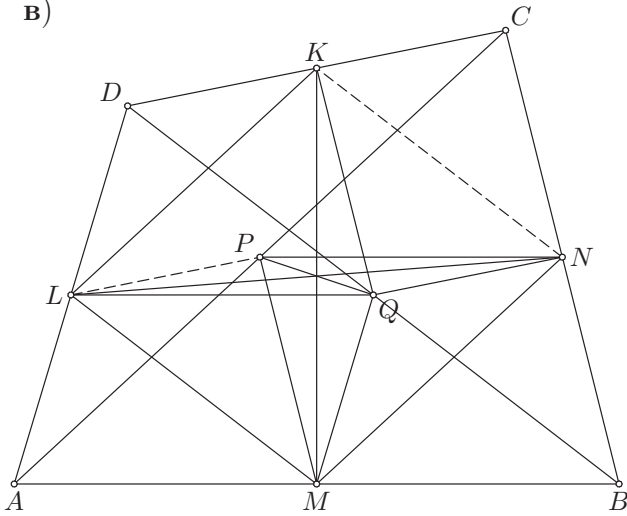


а) Како су тачке  $M$  и  $N$  средишта дужи  $AB$  и  $BC$ , редом, дуж  $MN$  је средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па закључујемо да је  $MN \parallel AC$  и  $MN = \frac{1}{2}AC$ . Такође,  $KL$  је средња линија троугла  $\triangle ACD$ , па следи да је  $KL \parallel AC$  и  $KL = \frac{1}{2}AC$ . Закључујемо да је  $MN \parallel KL$  и  $MN = KL$ .

Слично је и  $QK$  средња линија троугла  $\triangle BCD$ , па је  $QK \parallel BC$  и  $QK = \frac{1}{2}BC$ . Такође је  $MP$  средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $MP \parallel BC$  и  $MP = \frac{1}{2}BC$ , па закључујемо да је  $QK \parallel MP$  и  $QK = MP$ .

б) Из дела а) имамо да је  $MN \parallel KL$  и  $MN = KL$ , па је четвороугао  $MNKL$  паралелограм. Следи да његове дијагонале  $MK$  и  $LN$  имају заједничко средиште. Такође, из дела а) закључујемо да је  $QK \parallel MP$  и  $QK = MP$ , па је четвороугао  $KPMQ$  паралелограм. Одавде закључујемо да његове дијагонале  $KM$  и  $PQ$  имају заједничко средиште. Како смо доказали да и  $MK$  и  $LN$  имају заједничко средиште, а свака дуж има јединствено средиште, следи да све три дужи ( $MK, LN$  и  $PQ$ ) имају заједничко средиште.

В)

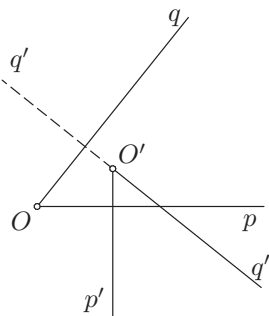


Дуж  $PM$  је средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $PM \parallel BC$ , а дуж  $MQ$  је средња линија троугла  $\triangle ABD$ , па је  $MQ \parallel AD$ . Ако са  $\angle(AD, BC)$  означимо угао који граде праве  $AD$  и  $BC$ , онда тај угао и угао  $\angle PMQ$  имају паралелне краке, па су подударни. Дакле,  $\angle PMQ = \angle(AD, BC)$ .

Дуж  $PN$  је средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $PN \parallel AB$ , а дуж  $NQ$  је средња линија троугла  $\triangle BCD$ , па је  $NQ \parallel CD$ . Угао који граде праве  $AB$  и  $CD$  и угао  $\angle PNQ$  имају паралелне краке, па морају бити једнаки, односно важи  $\angle PNQ = \angle(AB, CD)$ .

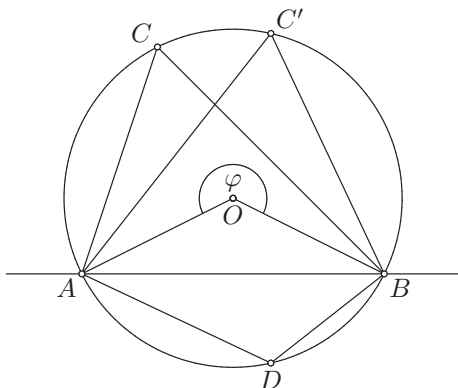
Коначно,  $LM$  је средња линија троугла  $\triangle ABD$ , па је  $LM \parallel BD$ , а  $MN$  је средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $MN \parallel AC$ . Сада видимо да углови  $\angle LMN$  и  $\angle(AC, BD)$  имају паралелне краке, па следи да је  $\angle LMN = \angle(AC, BD)$ .

**Теорема 3** (Углови са нормалним крацима). Нека су  $\angle pOq$  и  $\angle p'O'q'$  шакви да је  $Op \perp O'p'$  и  $Oq \perp O'q'$ . Тада је  $\angle pOq = \angle p'O'q'$  или  $\angle pOq + \angle p'O'q' = \pi$ .



Подсетимо се сада централних и периферијских углова.

**Дефиниција 3.** Нека је  $k$  круг, нека је  $O$  његов центар и нека су  $A, B, C$  тачке са тог круга. Угао  $\angle ACB$  зове се *периферијски угао*, а угао  $\angle AOB$  зове се *централни угао*.



Ако су тачке  $C$  и  $O$  са исте стране праве  $AB$ , онда знамо да је  $\angle AOB = 2\angle ACB$ . Зато се у том случају каже да централни угао  $\angle AOB$  одговара периферијском углу  $\angle ACB$ . С тим у вези, ако је  $C'$  нека друга тачка на кругу  $k$  таква да су  $C, C', O$  с исте стране праве  $AB$ , онда из  $\angle AOB = 2\angle ACB$  и  $\angle AOB = 2\angle AC'B$  следи да је  $\angle ACB = \angle AC'B$ . За периферијске углове  $\angle ACB$  и  $\angle AC'B$  каже се да су *над истим луком* или *над истом шевивом* (у овом случају, луком  $\widehat{AB}$ , односно тетивом  $AB$ ). Међутим, ако је  $D$  тачка на кругу  $k$  која је са супротне стране праве  $AB$  од тачака  $C, C', O$ , онда неће бити  $\angle ADB = \angle ACB$ . Разлог је тај што његов одговарајући централни угао није угао  $\angle AOB$ . У ствари, његов централни угао је на слици означен са  $\varphi$  и представља допуну угла  $\angle AOB$  до пуног угла. И у овом случају важи да је одговарајући централни угао два пута већи од периферијског, дакле  $\varphi = 2\angle ADB$ . Израчунајмо колики је угао  $\angle ADB$ . Како је пун угао једнак  $2\pi$ , следи да је  $\angle AOB + \varphi = 2\pi$ , па је  $\varphi = 2\pi - \angle AOB = 2\pi - 2\angle ACB$ . Одавде закључујемо да је  $\angle ADB = \pi - \angle ACB$ .

Приметимо да периферијски углови  $\angle ACB$  и  $\angle ADB$  нису над истим луком, јер је угао  $\angle ACB$  над луком  $\widehat{ADB}$ , док је угао  $\angle ADB$  над луком  $\widehat{ACB}$ . Формулишимо теорему.

**Теорема 4.** *Периферијски улови над истим луком су међусобно подударни. Периферијски улови над истом шевивом су или подударни или суэлементни улови.*

Важи и обратно. Наиме, нека су у равни дате тачке  $A, B, C$  на кругу  $k$  и тачка  $C'$  за коју не знамо да ли је на кругу. Уколико су  $C, C'$  са исте стране праве  $AB$  и  $\angle ACB = \angle AC'B$  или уколико су  $C, C'$  са супротних страна праве  $AB$  и  $\angle ACB + \angle AC'B = \pi$ , следи да  $C' \in k$ .

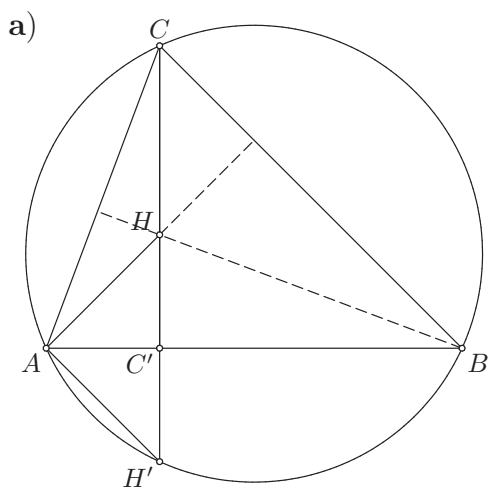
Ако су тачке  $A, B$  са круга  $k$  такве да је  $AB$  пречник и ако је  $O$  центар круга  $k$ , онда је централни угао  $\angle AOB$  опружени угао, тј.  $\angle AOB = \pi$ .

**Теорема 5.** *Периферијски угао над пречником је прав.*

3. Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на:

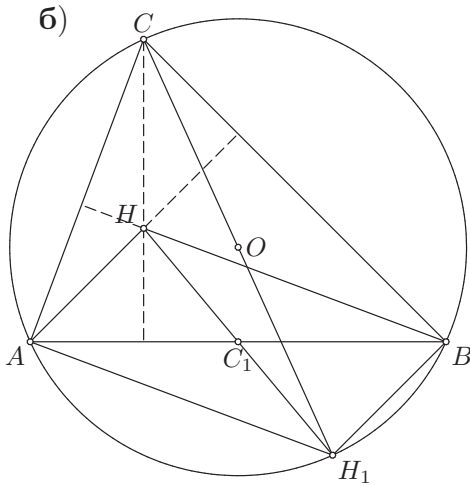
- а) странице троугла;      б) средишта страница троугла;  
припадају кругу описаном око тог троугла.

**Решење:**



Означимо са  $C'$  подножје висине из темена  $C$  на правој  $AB$ , а са  $H'$  тачку која је симетрична ортоцентру  $H$  у односу на страницу  $AB$  (у питању је осна симетрија). Тада је  $HH' \perp AB$  и тачка  $C'$  је средиште дужи  $HH'$ , тј.  $HC' = C'H'$ . Како је и  $\angle HC'A = \angle H'C'A$ , јер су оба угла права (једнака  $90^\circ$ , односно  $\frac{\pi}{2}$ ) и  $AC' = AC'$ , на основу става СУС закључујемо да је  $\triangle HC'A \cong \triangle H'C'A$ . Добијамо да је  $\angle AH'C' = \angle AHC'$ . Нама је циљ да докажемо да су углови  $\angle AH'C$  и  $\angle ABC$  подударни, јер ћемо онда имати да је угао  $\angle AH'C$  периферијски над луком  $\widehat{AC}$ , па ће  $H'$  припадати описаном кругу троугла  $\triangle ABC$ . Углови  $\angle AH'C'$  и  $\angle AH'C$  су исти, па је довољно доказати да је  $\angle AHC' = \angle ABC$ . Међутим, како је  $HC' \perp AB$  јер је  $HC'$  висина, и  $AH \perp BC$  јер је  $AH$  висина, следи да углови  $\angle AHC'$  и  $\angle ABC$  имају нормалне краке, те су међусобно подударни.





Означимо са  $C_1$  средиште странице  $AB$  троугла  $\triangle ABC$  и са  $H_1$  тачку симетричну ортоцентру  $H$  у односу на тачку  $C_1$  (сада је у питању централна симетрија). Тада је тачка  $C_1$  средиште дужи  $HH_1$ . У четвороуглу  $AH_1BH$  дијагонале  $AB$  и  $HH_1$  имају заједничко средиште, тачку  $C_1$ , па је у питању паралелограм. Закључујемо да је  $BH \parallel H_1A$  и да је  $AH \parallel H_1B$ . Како је  $BH$  висина, следи да је  $BH \perp AC$ , па следи и да је  $H_1A \perp AC$ , тј.  $\angle H_1AC = \frac{\pi}{2}$ . Према томе, троугао  $\triangle ACH_1$  је правоугли, па је центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена  $A, C, H_1$ ) средиште хипотенузе  $CH_1$ . Слично,  $AH$  је висина, па је  $AH \perp BC$ , а пошто је  $H_1B \parallel AH$ , следи да је  $H_1B \perp BC$ , тј. да је  $\angle H_1BC = \frac{\pi}{2}$ . Према томе, троугао  $\triangle BCH_1$  је правоугли, па је центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена  $B, C, H_1$ ) средиште хипотенузе  $CH_1$ .

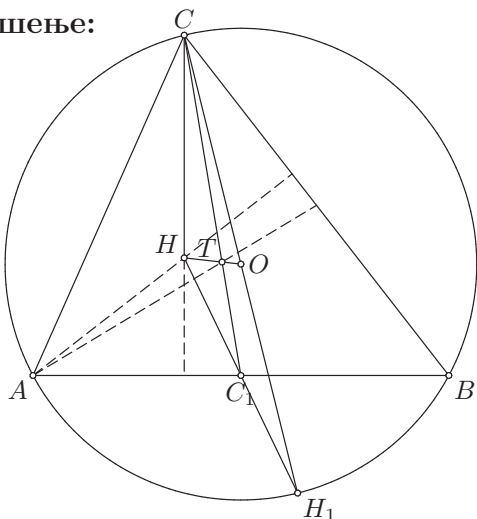
Описани кругови троуглова  $\triangle ACH_1$  и  $\triangle BCH_1$  имају исти центар (средиште дужи  $CH_1$ ) и исти полупречник (половина дужи  $CH_1$ ), те ти троуглови имају исти описани круг. Дакле, један исти круг садржи тачке  $A, B, C, H_1$ . Како се око сваког троугла може описати само један круг, тј. за сваке три неколинеарне тачке постоји јединствени круг који их садржи, следи да описани круг троугла  $\triangle ABC$  (тј. онај круг који садржи његова темена  $A, B, C$ ) мора бити исти као и круг који садржи тачке  $A, B, C, H_1$  (дакле, заједнички описани круг троуглова  $\triangle ACH_1$  и  $\triangle BCH_1$ ). Овим је доказано да се тачка  $H_1$  налази на описаном кругу троугла  $\triangle ABC$ .

**Напомена 1.** Није потребно посебно доказивати да и тачке симетричне ортоцентру  $H$  у односу на странице  $AC$  и  $BC$ , као и тачке симетричне средиштима тих страница, припадају описаном кругу троугла  $\triangle ABC$  јер

су све три странице троугла  $\triangle ABC$  међусобно равноправне.

**4. (Ојлерова права)** Средиште описаног круга  $O$ , ортоцентар  $H$  и тежиште  $T$  произвољног троугла су колинеарне тачке и важи  $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$ . Доказати.

**Решење:**



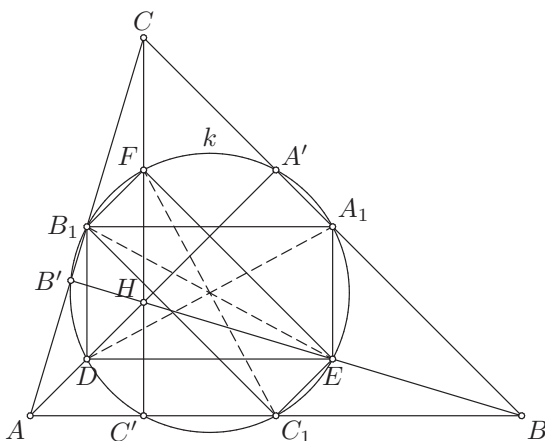
Нека је  $H_1$  тачка из 3. задатка, тј. тачка симетрична ортоцентру  $H$  у односу на средиште  $C_1$  странице  $AB$ . Посматрајмо троугао  $\triangle CH_1H$ . Како је  $C_1$  средиште његове странице  $H_1H$ , следи да је дуж  $CC_1$  тежишна дуж тог троугла. Такође, дуж  $CC_1$  је и тежишна дуж троугла  $\triangle ABC$ , јер је  $C_1$  средиште његове странице  $AB$ . Из 3. задатка следи да је  $CH_1$  пречник описаног круга троугла  $\triangle ABC$ , па је његов центар  $O$  средиште дужи  $CH_1$ . Дакле, дуж  $HO$  је тежишна дуж троугла  $\triangle CH_1H$ , па је њен пресек са тежишном дужи  $CC_1$  тежиште троугла  $\triangle CH_1H$ . Означимо га са  $T_1$  и докажимо да је то заправо тачка  $T$  (тежиште троугла  $\triangle ABC$ ), тј. да је  $T_1 = T$ .

Како је тежиште сваког троугла тачка која дели његове тежишне дужи у односу 2:1, следи да тежиште  $T$  троугла  $\triangle ABC$  дели његову тежишну дуж  $CC_1$  у односу 2:1, тј. важи  $CT : TC_1 = 2 : 1$ . Такође, тежиште  $T_1$  троугла  $\triangle CH_1H$  дели његову тежишну дуж  $CC_1$  у односу 2:1, тј. важи  $CT_1 : T_1C_1 = 2 : 1$ . Како је тачка која дели неку дуж у неком односу јединствена, следи да је  $T_1 = T$ . Дакле,  $T$  је тежиште и троугла  $\triangle CH_1H$ . Према томе, тачка  $T$  припада његовој тежишној дужи  $HO$  (па су  $H, T, O$  колинеарне) и дели је у односу 2:1, тј. важи  $HT : TO = 2 : 1$ . Како  $T$  припада баш дужи  $HO$ , следи да вектори  $\overrightarrow{HT}$  и  $\overrightarrow{TO}$  имају исти смер, а из  $HT : TO = 2 : 1$  следи да је  $HT = 2TO$ , па је заиста  $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$ .

**Дефиниција 4.** Права која садржи колинеарне тачке  $H, T, O$  зове се *Ојлерова права*.

**5. (Ојлеров круг)** Средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла припадају једном кругу. Доказати.

**Решење:**



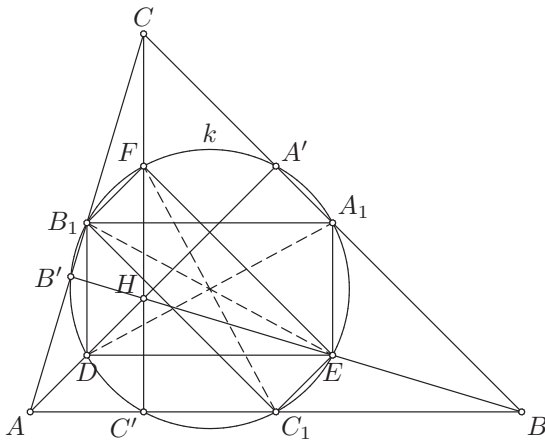
Нека су  $A', B', C'$  редом подножја висина из темена  $A, B, C$  на страницама  $BC, CA, AB$  троугла  $\triangle ABC$  и нека су  $A_1, B_1, C_1$  редом средишта страница  $BC, CA, AB$ . Дужи које спајају темена и ортоцентар  $H$  троугла  $\triangle ABC$  су дужи  $AH, BH, CH$ , па означимо редом са  $D, E, F$  њихова средишта. Треба доказати да постоји круг који садржи ових девет тачака  $(A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F)$ .

Посматрајмо четвороугао  $DEA_1B_1$ . Дуж  $B_1A_1$  је средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $B_1A_1 \parallel AB$  и  $B_1A_1 = \frac{1}{2}AB$ , а дуж  $DE$  је средња линија троугла  $\triangle ABH$ , па је  $DE \parallel AB$  и  $DE = \frac{1}{2}AB$ . Закључујемо да је  $DEA_1B_1$  паралелограм. Поред тога,  $DB_1$  је средња линија троугла  $\triangle ACH$ , па је  $DB_1 \parallel CH$ . Како је  $CH \perp AB$  јер је  $CH$  висина, следи да је  $DB_1 \perp AB$ . Међутим, имамо да је  $B_1A_1 \parallel AB$ , па је  $DB_1 \perp B_1A_1$ . Према томе, угао  $\angle DB_1A_1$  је прав, па како је паралелограм који има један прав угао заправо правоугаоник, следи да је четвороугао  $DEA_1B_1$  правоугаоник. Како се око правоугаоника може описати круг, следи да постоји круг који садржи тачке  $A_1, B_1, D, E$ .

Слично, четвороугао  $B_1C_1EF$  је правоугаоник. Заиста, он је паралелограм, јер је  $B_1C_1$  средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $B_1C_1 \parallel BC$  и  $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$  и  $EF$  је средња линија троугла  $\triangle BCH$ , па је  $EF \parallel BC$  и  $EF = \frac{1}{2}BC$ , одакле закључујемо да је  $B_1C_1 \parallel EF$  и  $B_1C_1 = EF$ .

Поред тога,  $C_1E$  је средња линија троугла  $\triangle ABH$ , па је  $C_1E \parallel AH$ , а пошто је  $AH \perp BC$  јер је  $AH$  висина, важи и  $C_1E \perp BC$ . А како је  $B_1C_1 \parallel BC$ , следи да је  $C_1E \perp B_1C_1$ , тј. да је угао  $\angle B_1C_1E$  прав, па је четвороугао  $B_1C_1EF$  паралелограм са једним правим углом, односно он је правоугаоник.

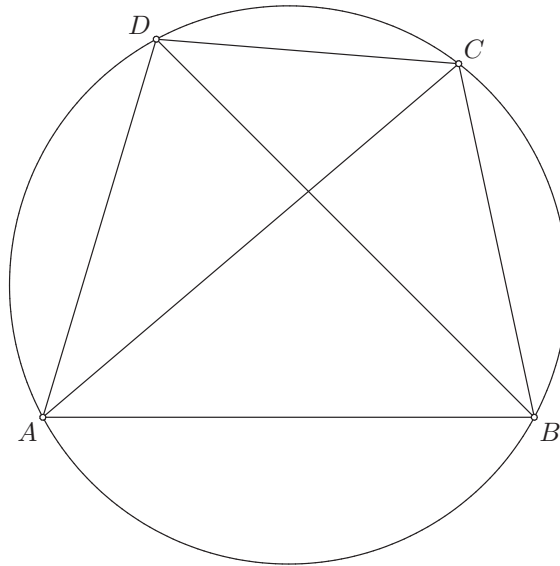
Како је дијагонала правоугаоника пречник његовог описаног круга, следи да је његов центар средиште дијагонале, а полупречник половина дијагонале. Дуж  $B_1E$  је заједничка дијагонала правоугаоника  $DEA_1B_1$  и  $B_1C_1EF$ , па следи да описани кругови тих правоугаоника имају исти центар и исти полупречник, односно та два правоугаоника имају исти описани круг. Дакле, круг који садржи тачке  $A_1, B_1, D, E$  садржи и тачке  $B_1, C_1, E, F$ . Дакле, постоји круг, назовимо га  $k$ , који садржи тачке  $A_1, B_1, C_1, D, E, F$ .



Остаје нам још да докажемо да тачке  $A', B', C'$  припадају том кругу. Дуж  $B_1E$  је пречник круга  $k$ , а угао  $\angle B_1B'E$  је прав, јер је  $B'E$  висина, а права  $B_1B'$  је иста као и права  $AC$ . Како је  $\angle B_1B'E$  прав као и периферијски угао над пречником  $B_1E$  круга  $k$ , то тачка  $B'$  припада кругу  $k$ . Слично доказујемо и да тачке  $A', C'$  припадају кругу  $k$ . Уочимо дијагоналу  $DA_1$  правоугаоника  $DEA_1B_1$  и приметимо да је угао  $\angle DA'A_1$  прав, јер је  $DA'$  висина, а права  $A'A_1$  је иста као и права  $BC$ . Како је  $\angle DA'A_1$  прав, онда тачка  $A'$  припада кругу  $k$  са пречником  $DA_1$ . За тачку  $C'$  уочимо дијагоналу  $FC_1$  правоугаоника  $B_1C_1EF$  и приметимо да је  $\angle FC'C_1 = \frac{\pi}{2}$  јер је  $FC'$  висина, а права  $C'C_1$  иста као и права  $AB$ . Како је угао  $\angle FC'C_1$  прав, онда тачка  $C'$  припада кругу  $k$  са пречником  $FC_1$ .

**Дефиниција 5.** Круг који садржи тачке  $A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F$  зове се *Ојлеров круг*.

**Дефиниција 6.** Четвороугао  $ABCD$  је *тетиван* ако се око њега може описати круг, тј. ако постоји круг који садржи његова темена  $A, B, C, D$ .



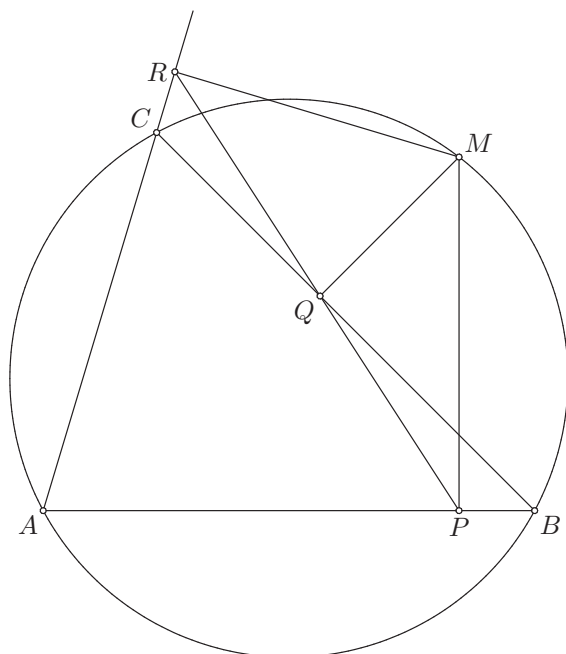
Посматрајмо конвексан четвороугао  $ABCD$ . Нека је он тетиван. На-спрамни углови  $\angle BAD$  и  $\angle BCD$  су периферијски углови над тетивом  $BD$  и при томе су тачке  $A, C$  са супротних страна праве  $BD$ . Следи да је  $\angle BAD + \angle BCD = \pi$ . Обратно, нека не знамо да ли је четвороугао  $ABCD$  тетиван, а имамо да је  $\angle BAD + \angle BCD = \pi$ . Посматрајмо круг  $k$  описан око троугла  $\triangle ABD$ . Како се тачке  $A, C$  налазе са супротних страна праве  $BD$ , следи да је угао  $\angle BCD$  периферијски над тетивом  $BD$ , па његово теме  $C$  припада кругу  $k$ . Дакле, круг  $k$  садржи темена четвороугла  $ABCD$ , па је четвороугао  $ABCD$  тетиван.

Дакле, услов да су наспрамни углови конвексног четвороугла суплементни потребан је и довољан (дакле еквивалентан) да четвороугао  $ABCD$  буде тетиван. Специјално, уколико су наспрамни углови четвороугла  $ABCD$  прави, онда су они суплементни, па је четвороугао  $ABCD$  тетиван.

Од еквивалентних услова за тетивност конвексног четвороугла даћемо још један. Ако је четвороугао  $ABCD$  конвексан и  $\angle ADB = \angle ACB$ , онда је тај четвороугао тетиван. Овај услов је у ствари услов подударности периферијских углова  $\angle ADB = \angle ACB$  над луком  $\widehat{AB}$  (тачке  $C, D$  су са исте стране праве  $AB$ ).

**6. (Симсонова права)** Подножја нормала из произвољне тачке круга описаног око неког троугла, на правима које садрже странице тог троугла, припадају једној правој.

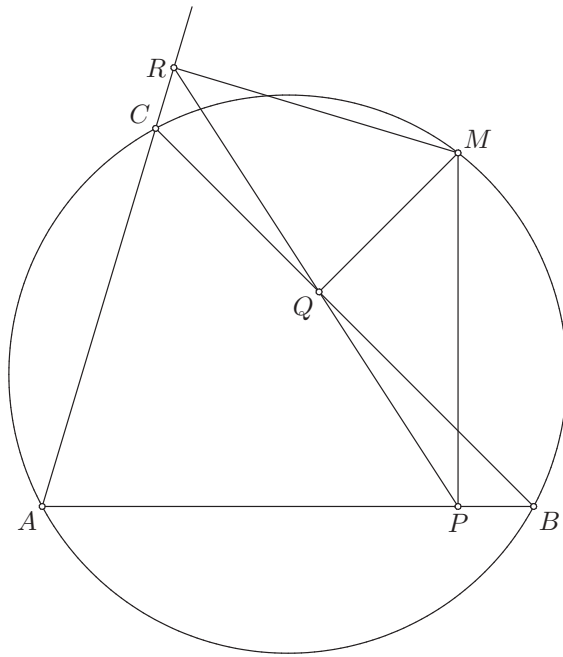
**Решење:**



Нека је  $M$  произвољна тачка на кругу описаном око троугла  $\triangle ABC$  и нека су  $P, Q, R$  редом подножја нормала из  $M$  на праве  $AB, BC, CA$ . Уколико докажемо да је  $\angle PQB = \angle CQR$ , онда ће због колинеарности тачака  $B, Q, C$  ( $Q$  је подножје нормале из  $M$  на праву  $BC$ , па припада тој правој) углови  $\angle PQB$  и  $\angle CQR$  бити унакрсни, па ће онда и тачке  $P, Q, R$  припадати једној правој, тј. биће колинеарне.

Уочимо четвороугао  $APMR$ . Он је тетиван, јер су му наспрамни углови  $\angle APM$  и  $\angle ARM$  прави, па су суплементни. Следи да су и друга два наспрамна угла суплементна, тј.  $\angle PAR + \angle PMR = \pi$ . Даље, уочимо четвороугао  $CQMR$ . И он је тетиван, јер су му супротни углови  $\angle CQM$  и  $\angle CRM$  прави, па су суплементни. Одавде закључујемо да су периферијски углови  $\angle CQR$  и  $\angle CMR$  над луком  $\widehat{CR}$  подударни. Дакле,  $\angle CQR = \angle CMR$ .

Посматрајмо сада четвороугао  $PBMQ$ . Њему су углови  $\angle BQM$  и  $\angle BPM$  над  $BM$  подударни, јер су то прави углови. Следи да је четвороугао  $PBMQ$  тетиван, па је  $\angle PQB = \angle PMB$ , јер су то периферијски углови над луком  $\widehat{PB}$ . Коначно, четвороугао  $ABMC$  је тетиван (по дефиницији, његова темена  $A, B, M, C$  припадају једном кругу и то баш описаном кругу троугла  $\triangle ABC$ ), па су супротни углови  $\angle BAC$  и  $\angle BMC$  суплементни, тј.  $\angle BAC + \angle BMC = \pi$ .



Сада, како је  $\angle BAC = \angle PAR$  јер је у питању исти угао и како важи да је  $\angle BAC + \angle BMC = \pi$  и  $\angle PAR + \angle PMR = \pi$ , закључујемо да је  $\angle BMC = \angle PMR$ . А како имамо да је  $\angle BMC = \angle PMB + \angle PMC$  и  $\angle PMR = \angle PMC + \angle CMR$ , следи да је  $\angle PMB = \angle CMR$ . Одавде следи, због  $\angle PQB = \angle PMB$  и  $\angle CQR = \angle CMR$ , да је  $\angle PQB = \angle CQR$ , што смо и желели да докажемо.

**Дефиниција 7.** Права која садржи тачке  $P, Q, R$  зове се *Симсонова права*.

**Дефиниција 8.** Четвороугао  $ABCD$  је *тангентан* уколико се у њега може уписати круг, тј. уколико постоји круг такав да су странице тог четвороугла тангенте на том кругу.

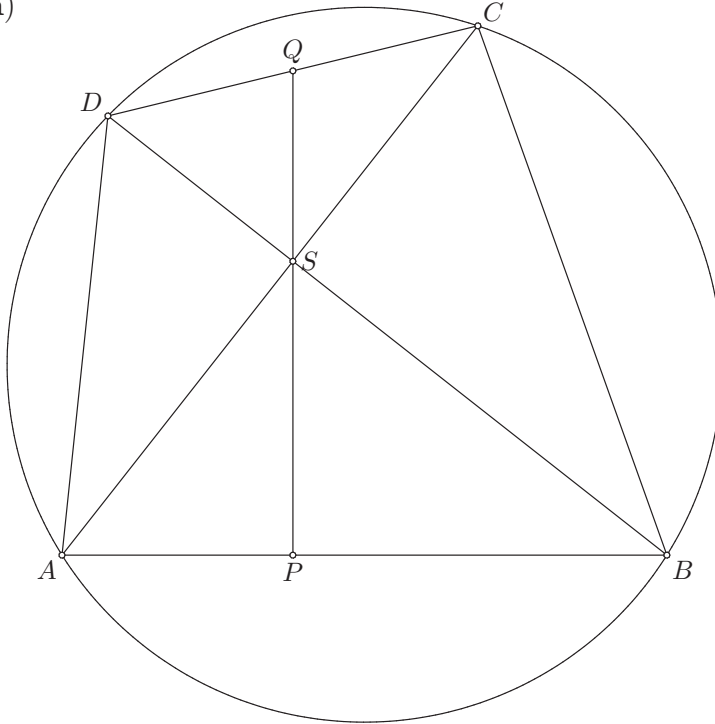
Ако се код четвороугла бисектрисе унутрашњих углова секу у једној тачки, онда је тај четвороугао тангентан.

**7.** Дат је тетиван четвороугао  $ABCD$  чије су дијагонале међусобно нормалне и секу се у тачки  $S$ .

- а) Права која садржи тачку  $S$  и нормална је на правој  $AB$  садржи средиште дужи  $CD$ . Доказати.
- б) Ако су  $A', B', C', D'$  пројекције тачке  $S$  на правима  $AB, BC, CD, DA$ , редом, тада је четвороугао  $A'B'C'D'$  тетиван и тангентан. Доказати.

Решење:

а)

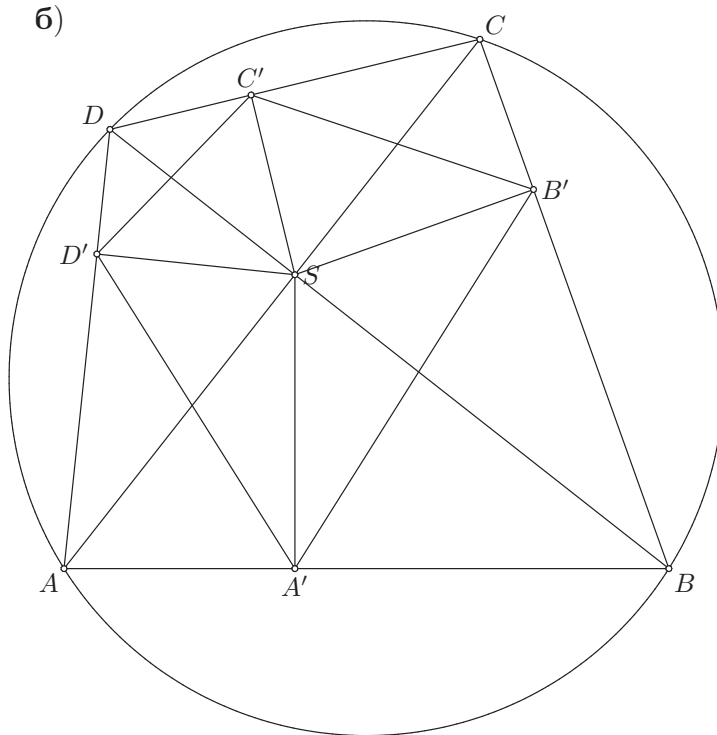


Нека је  $P$  подножје нормале из  $S$  на страници  $AB$  и нека је  $Q$  пресечна тачка праве  $PS$  и странице  $CD$ . Означимо угао  $\angle BAC = \alpha$  и угао  $\angle ABD = \beta$ . Како је  $\angle BAS = \angle BAC = \alpha$  и  $\angle ABS = \angle ABD = \beta$ , из  $\angle BAS + \angle ABS + \angle ASB = \pi$  и  $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$  (дијагонале четвороугла  $ABCD$  су нормалне) следи да је  $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$ , тј. да је  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ .

Даље,  $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$  и  $\angle ACD = \angle ABD = \beta$  (периферијски углови над истим луком). Како је  $\angle APS = \frac{\pi}{2}$  и  $\angle PAS = \angle BAS = \alpha$ , следи да је  $\angle PSA = \pi - \angle APS - \angle PAS = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$ . Поред тога, како је  $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$ , следи да је  $\angle PSB = \angle ASB - \angle PSA = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$ .

Сада приметимо да су углови  $\angle DSQ$  и  $\angle PSB$  унакрсни, па следи да је  $\angle DSQ = \angle PSB = \alpha$ . Такође, углови  $\angle CSQ$  и  $\angle PSA$  унакрсни, па је и  $\angle CSQ = \angle PSA = \beta$ . У троуглу  $\triangle DSQ$  су углови  $\angle DSQ = \alpha$  и  $\angle SDQ$  подударни (јер је  $\angle SDQ = \angle BDC = \alpha$ ), па је он једнакоккраки. Следи да је  $DQ = QS$ . А у троуглу  $\triangle CSQ$  су углови  $\angle CSQ = \beta$  и  $\angle SCQ$  подударни (јер је  $\angle SCQ = \angle ACD = \beta$ ), па је и тај троугао једнакоккраки. Следи да је  $CQ = QS$ , па заједно са  $DQ = QS$  следи да је  $CQ = DQ$ , односно да је  $Q$  средиште  $CD$ .



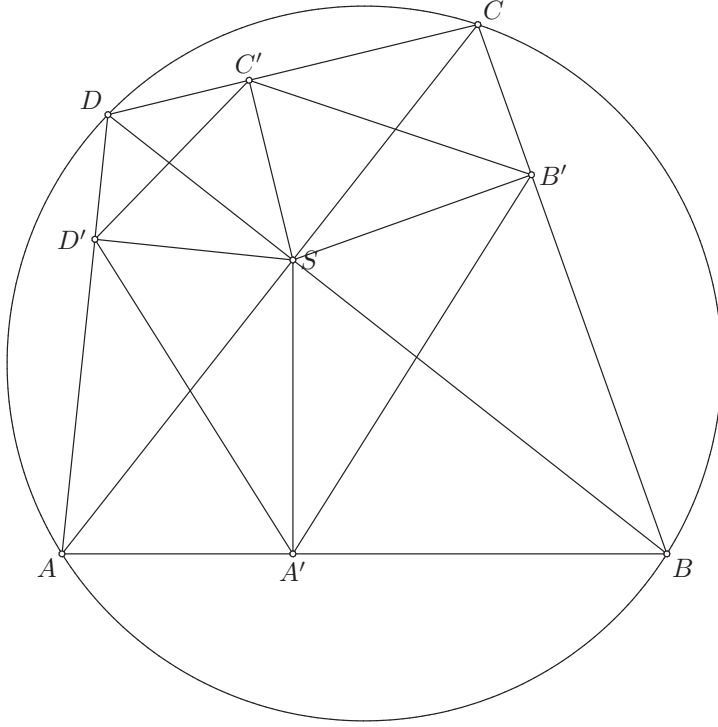


Докажимо да су  $A'S, B'S, C'S, D'S$  симетрале унутрашњих углова код темена  $A', B', C', D'$  четвороугла  $A'B'C'D'$ . Тада ћемо имати да се симетрале унутрашњих углова четвороугла  $A'B'C'D'$  секу у једној тачки (тачки  $S$ ), па ће то бити центар његовог уписаног круга, а сам четвороугао ће бити тангентни.

Четвороугао  $A'BB'S$  је тетиван. Заиста, наспрамни углови  $\angle BA'S$  и  $\angle BB'S$  су оба права, па су и суплементни. Слично, четвороугао  $B'CC'S$  је тетиван јер су наспрамни углови  $\angle CB'S$  и  $\angle CC'S$  прави углови, па су суплементни, затим је четвороугао  $C'DD'S$  тетиван јер су му наспрамни углови  $\angle DC'S$  и  $\angle DD'S$  оба права, па су суплементни, и, коначно, четвороугао  $D'AA'S$  је тетиван јер су му наспрамни углови  $\angle AD'S$  и  $\angle AA'S$  оба права, па су суплементни. Иначе, сви малопре поменути углови су прави јер су, по дефиницији, тачке  $A', B', C', D'$  подножја нормала из  $S$  редом на страницама  $AB, BC, CD, DA$ .

Пре него што искористимо тетивност горепоменутих четвороуглова, означимо углове:  $\angle SA'B' = \alpha, \angle SB'C' = \beta, \angle SC'D' = \gamma, \angle SD'A' = \delta$ . Из тетивности четвороугла  $A'BB'S$  следи да је  $\angle SBB' = \angle SA'B' = \alpha$  (периферијски над луком  $\widehat{SB'}$ ). Међутим,  $\angle DBC = \angle SBB' = \alpha$ , па из тетивности четвороугла  $ABCD$  следи да је  $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$  (пе-

риферијски над луком  $\widehat{DC}$ ), а сада из  $\angle SAD' = \angle CAD = \alpha$  и тетивности четвороугла  $D'AA'S$  следи да је  $\angle SA'D' = \angle SAD' = \alpha$ . Дакле,  $\angle SA'B' = \alpha = \angle SA'D'$ , па је заиста  $A'S$  симетрала угла  $B'A'D'$ , тј. унутрашњег угла код темена  $A'$  четвороугла  $A'B'C'D'$ .



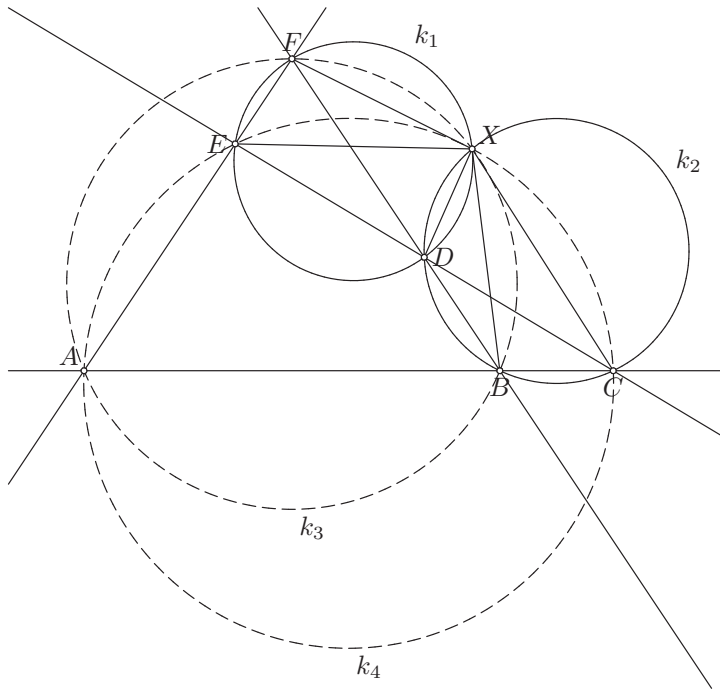
Сасвим слично се доказује да је  $\beta = \angle SB'C' = \angle SCC' = \angle ACD = \angle ABD = \angle A'BS = \angle A'B'S$ , тј. да је  $\angle SB'C' = \angle SB'A' = \beta$ , а затим и да је  $\angle SC'D' = \angle SC'B' = \gamma$  и  $\angle SD'A' = \angle SD'C' = \delta$ . Дакле, заиста се тачка  $S$  налази у пресеку симетрала унутрашњих углова четвороугла  $A'B'C'D'$ , па је тај четвороугао тангентан.

Приметимо да су унутрашњи углови код темена  $A', B', C', D'$  четвороугла  $A'B'C'D'$  подударни редом угловима  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ . Да бисмо доказали да је  $A'B'C'D'$  тетиван, довољно је доказати да је збир нека два супротна угла, нпр. углова код темена  $A'$  и  $C'$ , једнак опруженом углу. Другим речима, довољно је доказати да је  $2\alpha + 2\gamma = \pi$ , односно да је  $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ . Из претходног имамо да је  $\angle SBC = \alpha$  и да је  $\angle SCB = \gamma$ , па како из услова нормалности дијагонала  $AC$  и  $BD$  четвороугла  $ABCD$  имамо да је  $\angle BSC = \frac{\pi}{2}$ , следи да је

$$\alpha + \gamma = \angle SBC + \angle SCB = \pi - \angle BSC = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

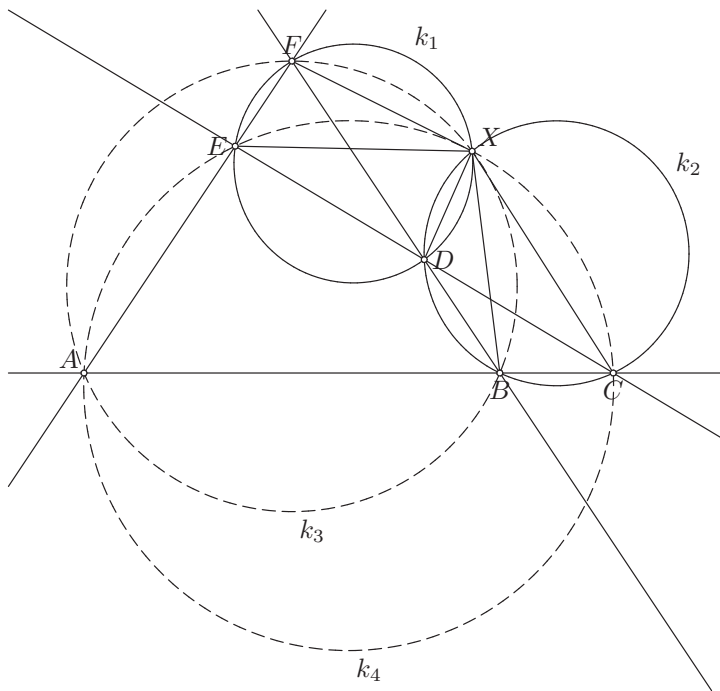
**8. (Микелова теорема)** Четири праве у општем положају у равни одређују четири троугла. Доказати да се описани кругови тих троуглова секу у једној тачки.

**Решење:**



Означимо пресечне тачке ових правих са  $A, B, C, D, E, F$ , као на слици. Тада имамо четири троугла (то су  $\triangle DEF, \triangle BCD, \triangle ABF, \triangle ACE$ ). Нека су  $k_1, k_2, k_3, k_4$  редом њихови описани кругови. Желимо да докажемо да се они секу у једној тачки. Нека су  $X, D$  пресечне тачке кругова  $k_1$  и  $k_2$ . Означимо углове  $\angle EDF = \alpha$ ,  $\angle EXD = \beta$  и  $\angle DXB = \gamma$ . Углови  $\angle BDC$  и  $\angle EDF$  су унакрсни, па су подударни. Дакле,  $\angle BDC = \alpha$ . Угао  $\angle EXF$  је периферијски над луком  $\widehat{EF}$ , па је подударан углу  $\angle EDF$ . Следи да је  $\angle EXF = \alpha$ . Такође, угао  $\angle BXC$  је периферијски над луком  $\widehat{BC}$ , па је подударан углу  $\angle BDC$ . Следи да је и  $\angle BXC = \alpha$ .

Имамо и да је  $\angle EFD = \angle EXD = \beta$  јер су то периферијски углови над луком  $\widehat{ED}$ , као и  $\angle DCB = \angle DXB = \gamma$  јер су то периферијски углови над луком  $\widehat{DB}$ . Одредимо угао  $\angle BAF = \angle CAE$ , пошто је то заједнички унутрашњи угао четвороуглова  $ABXF$  и  $ACXE$ . У томе ће нам помоћи угао  $\angle CEA$  који је спољашњи угао код темена  $E$  троугла  $DEF$ , па је једнак збиру његова два несуседна унутрашња угла, а то су  $\angle EFD = \beta$  и  $\angle EDF = \alpha$ . Дакле,  $\angle CEA = \alpha + \beta$ . Следи да је  $\angle CAE = \pi - \angle CEA - \angle ACE = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ .



Сада доказујемо да су четвороуглови  $ABXF$  и  $ACXE$  тетивни, јер ћемо тада добити да њихово заједничко теме  $X$  припада круговима који садрже тачке  $A, B, F$ , односно  $A, C, E$ , а то су баш описани кругови троуглова  $\triangle ABF$ , односно  $\triangle ACE$ . А како је  $\angle BXF = \angle BXD + \angle DXE + \angle EXF = \alpha + \beta + \gamma$ , као и  $\angle CXE = \angle CXB + \angle BXD + \angle DXE = \alpha + \beta + \gamma$ , следи да су супротни углови  $\angle BAF$  и  $\angle BXF$  четвороугла  $ABXF$ , односно  $\angle CAE$  и  $\angle CXE$  четвороугла  $ACXE$ , суплементни. Дакле, то су тетивни четвороуглови, па имамо да  $X$  припада круговима  $k_3, k_4$  (описаним око троуглова  $\triangle ABF$ , односно  $\triangle ACE$ ).

Према томе, тачка  $X$  припада круговима  $k_1, k_2, k_3, k_4$ . Како се кругови  $k_1, k_2$  секу у тачкама  $D, X$ , а пресек сва четири круга садржи тачку  $X$  и мора бити подскуп скупа који је пресек  $k_1$  и  $k_2$ , следи да је пресек сва четири круга или скуп  $\{D, X\}$  или скуп  $\{X\}$  (тј. само тачка  $X$ ). Међутим, тачка  $D$  не припада ни кругу  $k_3$  ни кругу  $k_4$ , па следи да не припада пресеку сва четири круга. Дакле, пресек кругова  $k_1, k_2, k_3, k_4$  је само тачка  $X$ , тј. та четири круга секу се у једној тачки (тачки  $X$ ).

**Напомена 2.** Када би кругови  $k_1$  и  $k_2$  имали само једну пресечну тачку  $D$  тј. тачку додира, тада праве не би биле у општем положају, већ би  $FE$  и  $BC$  биле паралелне. Дакле, кругови  $k_1$  и  $k_2$  се морају сећи у две различите тачке.