4.98. Пројективна колинеација Папосове равни има тачно a фиксних тачака. Колики је број тачака у тој равни уколико је а) $a=6$; б) $a=7$; в) $a=8$?

<u>Решење:</u> а) Приметимо да посматрана пројективна колинеација Папосове равни не може бити идентитет јер би тада број фиксних тачака морао бити облика r^2+r+1, а $a=6$ није тог облика.

То значи да не постоји четворотеменик чија су сва темена фиксна јер у Папосовој равни важи Основна теорема колинеације по којој уколико пројективна колинеација има фиксна темена четворотеменика, она мора бити идентитет.

Како имамо $a=6\geq 4$ фиксних тачака, то постоје три колинеарне фиксне тачке.
Рестрикција посматране пројективне колинеације на ту праву на којој су три фиксне тачке мора бити пројективитет по дефиницији пројективне колинеације. Тај пројективитет мора бити идентитет на основу Основне теореме пројективитета јер има три фиксне тачке.
Како посматрана колинеација има тачка-по-тачка фиксну праву, то је оса, а та колинеација је перспективна и има и центар.
Перспективна колинеација може бити хомологија која има центар ван осе и број њених фиксних тачака је $a=(r+1)+1=r+2$, где је r ред одговарајуће пројективне равни, јер на оси имамо $r+1$ фиксних тачака, а ван осе још само једну, центар. Како је $r=a-2=6-2=4$, то је пројективна раван коју посматрамо таква да има $r^2+r+1=4^2+4+1=16+5=21$ тачака. Постоји пројективна раван реда 4 јер је 4 степен простог броја.
Перспективна колинеација може бити елација која има центар на оси и број њених фиксних тачака је $a=r+1$, где је r ред одговарајуће пројективне равни, јер на оси имамо $r+1$ фиксних тачака, а ван осе нема фиксних тачака. Како је $r=a-1=6-1=5$, посматрана пројективна раван има $r^2+r+1=5^2+5+1=25+6=31$. Постоји пројективна раван реда 5 јер је 5 прост број.

Број тачака у тој равни може бити 21 или 31.

б) Приметимо да посматрана пројективна колинеација може бити идентитет јер је број фиксних тачака $a=7$ облика r^2+r+1 за $r=2$. Тада посматрана пројективна раван има укупно $r^2+r+1=2^2+2+1=4+3=7$ тачака.

Ако посматрана пројективна колинеација није идентитет онда не сме постојати четворотеменик чија су сва темена фиксна јер би по Основној теореми колинеације таква пројективна колинеација морала бити идентитет. Тада међу $a=7\geq 4$ фиксних тачака морају постојати три колинеарне фиксне тачке.

Рестрикција посматране пројективне колинеације на праву где су те три фиксне тачке је пројективитет по дефиницији пројективне колинеације, а како тај пројективитет има три фиксне тачке, то он мора бити идентитет на основу Основне теореме пројективитета. Тада посматрана пројективна колинеација има тачка-по-тачка фиксну праву, односно осу, те је та пројективна колинеација перспективна, те има и центар.

Ако је та перспективна колинеација хомологија, код које центар не припада оси, онда она има $a=(r+1)+1=r+2$ фиксних тачака (r је ред пројективне равни) јер имамо $r+1$ фиксних тачака на оси, а ван осе је само центар фиксна тачка. Тада је $r=a-2=7-2=5$, те та пројективна раван има укупно $r^2+r+1=5^2+5+1=25+6=31$ тачака. Постоји пројективна раван реда 5 јер је 5 прост број.

Ако је та перспективна колинеација елација, код које центар припада оси, онда она има $a=r+1$ фиксних тачака (r је ред пројективне равни) јер имамо $r+1$ фиксних тачака на оси, а ван ње немамо фиксних тачака. Тада би $r=a-1=7-1=6$, али то на основу Брук-Рајзерове теореме не може бити ред пројективне равни јер се не може записати као збир квадрата два цела броја ($6=6+0=5+1=4+2=3+3$).

Дакле, укупан број тачака у посматраној равни може бити 7 или 31.

в) Посматрана пројективна колинеација Папосове равни не може бити идентитет јер би тада укупан број фиксних тачака морао бити облика r^2+r+1, а $a=8$ није тог облика.

То значи да не постоји четворотеменик чија су сва темена фиксна јер у Папосовој равни важи Основна теорема колинеације по којој уколико пројективна колинеација има фиксна темена четворотеменика, она мора бити идентитет.

Како имамо $a=8\geq 4$ фиксних тачака, то постоје три колинеарне фиксне тачке.

Рестрикција посматране пројективне колинеације на ту праву на којој су три фиксне тачке мора бити пројективитет по дефиницији пројективне колинеације. Тај пројективитет мора бити идентитет на основу Основне теореме пројективитета јер има три фиксне тачке.

Како посматрана колинеација има тачка-по-тачка фиксну праву, то је оса, а та колинеација је перспективна и има центар.

Ако је та перспективна колинеација хомологија, која има центар ван осе, онда је број њених фиксних тачака $a=(r+1)+1=r+2$, где је r ред пројективне равни, јер имамо $r+1$ фиксних тачака на оси, а ван осе је само центар фиксна тачка. Како је $r=a-2=8-2=6$, то на основу Брук-Рајзерове теореме долазимо до контрадикције јер 6 не може бити ред пројективне равни зато што 6 није могуће записати као збир квадрата два цела броја $(6=6+0=5+1=4+2=3+3)$.

Ако је та перспективна колинеација елација, која има центар на оси, онда је број њених фиксних тачака $a=r+1$, где је r ред пројективне равни, јер имамо $r+1$ фиксних тачака на оси, а ван ње нема фиксних тачака. Како је $r=a-1=8-1=7$ што је прост број, то постоји пројективна раван реда 7 и она има укупно $r^2+r+1=7^2+7+1=49+8=57$ тачака.

Дакле, посматрана Папосова раван има укупно 57 тачака.

4.99. Израчунати број перспективних колинеација Дезаргове равни реда r.

Решење: Сетимо се теореме (Бер): Ако су A, A', S колинеарне тачке Дезаргове равни и s права са $A, A' \notin (s)$, тада постоји јединствена перспективна колинеација са осом s и центром S која пресликава A у A'.

Оса s може бити било која од укупно r^2+r+1 правих у посматраној Дезарговој равни реда r, те је можемо изабрати на r^2+r+1 начина.

Ако је перспективна колинеација елација, онда центар S припада оси s и можемо га изабрати на $r+1$ начина јер на правој s има $r+1$ тачака.

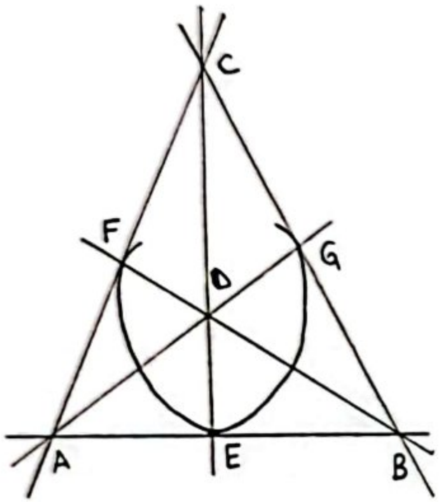
Ако је перспективна колинеација хомологија, онда центар S не припада оси s и можемо га изабрати на $r^2+r+1-(r+1) = r^2+r+1-r-1 = r^2$ начина јер има укупно r^2+r+1 тачака у посматраној Дезарговој равни реда r, а $r+1$ се налази на оси s.

Фиксирајмо сада произвољну тачку $A \notin (s) \cup \{S\}$ која се слика у тачку A' са праве $A \vee S$ (због особине перспективне колинеације да су тачке A, A' и S колинеарне), али не може бити $A' = S$ нити $A' = (A \vee S) \wedge s$ јер би онда, редом, било $A = S$, тј. $A = (A \vee S) \wedge s$ јер су центар S и све тачке са осе s фиксне. Не може бити ни $A' = A$ јер су $(s) \cup \{S\}$ једине фиксне тачке перспективне колинеације. Дакле, тачка A' се у случају елације може изабрати на $r+1-1-1 = r-1$ начина (од укупно $r+1$ тачака на правој $A \vee S$ одбацујемо A и $(A \vee S) \wedge s = S$), а у случају хомологије на $r+1-1-1-1 = r+1-3 = r-2$ начина (од укупно $r+1$ тачака на правој $A \vee S$ одбацујемо A, S и $(A \vee S) \wedge s$).

Зато је укупан број елација $(r^2+r+1)(r+1)\cdot(r-1) = (r^2+r+1)(r^2-1)$, а укупан број хомологија је $(r^2+r+1)\cdot r^2 \cdot (r-2) = (r^2+r+1)(r^3-2r^2)$, те је тражени број перспективних колинеација Дезаргове равни реда r једнак $(r^2+r+1)(r^2-1) + (r^2+r+1)(r^3-2r^2) = (r^2+r+1)\cdot(r^2-1+r^3-2r^2) = (r^2+r+1)\cdot(r^3-r^2-1)$.

4.100. Израчунати број (потпуних) тротеменика, четворотеменика и петотеменика, као и број хомологија, елација и недегенерисаних коника Фаноове равни.

Решење:



Фаноова раван $\mathbb{Z}_2P^2$ има ред 2, укупно $2^2+2+1=4+3=7$ тачака и 7 правих.

Број начина да изаберемо 3 од 7 тачака из Фаноове равни при чему нам није битан редослед те три тачке је биномни коефицијент $\binom{7}{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=7\cdot5=35$. Како у Фаноовој равни имамо тачно 7 тројки колинеарних тачака, то је укупан број тротеменика $35-7=28$.

Број начина да изаберемо 4 од укупно 7 тачака из Фаноове равни је $\binom{7}{4}=\binom{7}{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=7\cdot5=35$.

Четири тачке	ABCD	ABCE	ABCF	ABCG	ABDE	ABDF	ABDG	ABEF	ABEG	ABFG	ACDE	ACDF	ACDG	ACEF	ACEG	ACFG
Уочена тројка колинеарних тачака	Нема	A,E,B	A,F,C	B,G,C	A,E,B	B,D,F	A,D,G	A,E,B	A,E,B	нема	C,D,E	A,F,C	A,D,G	A,F,C	нема	A,F,C

ADEF	ADEG	ADFG	AEFG	BCDE	BCDF	BCDG	BCEF	BCEG	BCFG	BDEF	BDEG	BDFG	BEFG	CDEF	CDEG	CDFG	CEFG	DEFG
Нема	A,D,G	A,D,G	F,E,G	C,D,E	B,D,F	B,G,C	Нема	B,G,C	B,G,C	B,D,F	Нема	B,D,F	F,E,G	C,D,E	C,D,E	Нема	F,E,G	F,E,G

Има 7 четворотеменика Фаноове равни и то су ABCD, ABFG, ACEG, ADEF, BCEF, BDEG, CDFG.

Број начина да изаберемо 5 од 7 тачака је $\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=7\cdot 3=21$.

Пет тачака	ABCDE	ABCDF	ABCDG	ABCEF	ABCEG	ABCFG	ABDEF	ABDEG	ABDFG	ABEFG	ACDEF	ACDEG	ACDFG	ACEFG	ADEFG	BCDEF	BCDEG	BCDFG	BCEFG	BDEFG	CDEFG
Уочена тројка колинеарних тачака	C,D,E	A,F,C	A,D,G	A,F,C	A,E,B	A,F,C	A,E,B	A,E,B	B,D,F	A,E,B	A,F,C	C,D,E	A,F,C	A,F,C	E,F,G	C,D,E	B,G,C	B,G,C	E,F,G	E,F,G	E,F,G

Дакле, нема петотеменика у Фаноовој равни.

Како је ред Фаноове равни $r=2$, то је на основу задатка 4.99 број елација фаноове равни једнак $(r-1)(r+1)(r^2+r+1)=(2-1)\cdot(2+1)\cdot(2^2+2+1)=1\cdot 3\cdot(4+3)=3\cdot 7=21$, а број хомологија Фаноове равни је $(r^2+r+1)\cdot r^2\cdot(r-2)=$
$=(2^2+2+1)\cdot 2^2\cdot(2-2)=0$.

Недегенерисана коника Фаноове равни састоји се од три сецишта одговарајућих правих, односно у питању је тротеменик, те је тражени број 28.