4.26. Дате су тачке $A(1:1:1)$, $B(1:2:3)$ и праве $p: x_1 = 0$, $q: x_2 = 0$, $r: x_1 = x_3$. За колинеацију f важи $f(p) = p$, $f(q) = r$, $f(A) = B$, $f(B) = C$. Одредити матрице свих колинеација f уколико је

а) $C(2:3:1)$; б) $C(1:3:5)$.

(*) Нека је $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ тражена матрица колинеације f.

Тачке се пресликавају помоћу $\lambda X' = MX$, а праве са $\lambda U = M^T U'$.

Услов $f(p) = p$ је $[1:0:0] \xrightarrow{f} [1:0:0]$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = m_{11} \\ \boxed{\begin{array}{l} 0 = m_{12} \\ 0 = m_{13} \end{array}} \end{array}$$

Услов $f(q) = r$ значи $[0:1:0] \xrightarrow{f} [-1:0:1]$ одакле добијамо

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = -m_{11} + m_{31} \\ \lambda_2 = -m_{12} + m_{32} \\ 0 = -m_{13} + m_{33} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m_{11} = m_{31} \\ m_{33} = 0 \end{array}} \text{ јер } m_{13} = 0$$

Дакле, матрица M је облика $\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{11} & m_{32} & 0 \end{pmatrix}$.

Услов $f(A)=B$ значи $(1:1:1) \xmapsto{f} (1:2:3)$ тј.

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{11} & m_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda_3 = m_{11}$$

$$2\lambda_3 = m_{21} + m_{22} + m_{23}$$

$$3\lambda_3 = m_{11} + m_{32}$$

$$m_{21} + m_{22} + m_{23} = 2m_{11}$$

$$m_{11} + m_{32} = 3m_{11}$$

$$\Downarrow$$

$$m_{32} = 2m_{11}$$

$$m_{21} = 2m_{11} - m_{22} - m_{23}$$

Услов $f(B)=C$ значи $(1:2:3) \xmapsto{f} (x_1:x_2:x_3)$ где је $C(x_1:x_2:x_3)$

$$\lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 2m_{11}-m_{22}-m_{23} & m_{22} & m_{23} \\ m_{11} & 2m_{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_4 \cdot x_1 = m_{11} \\ \lambda_4 \cdot x_2 = 2m_{11}-m_{22}-m_{23}+2m_{22}+3m_{23} = 2m_{11}+m_{22}+2m_{23} \\ \lambda_4 \cdot x_3 = m_{11}+4m_{11} = 5m_{11} \\ x_1 : x_3 = 1:5 \end{cases}$$

а) Немогуће је да $\vec{C} \sim (2:3:1)$ па део а) нема решења.

б) $\vec{C} \sim (1,3,5)$

$$2m_{11}+m_{22}+2m_{23} = 3m_{11}$$

$$m_{22} = m_{11}-2m_{23}$$

$$\Rightarrow \quad 2m_{11}-m_{22}-m_{23} = 2m_{11}-m_{11}+2m_{23}-m_{23} = m_{11}+m_{23}$$

Матрице колинеација су $M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{11}+m_{23} & m_{11}-2m_{23} & m_{23} \\ m_{11} & 2m_{11} & 0 \end{pmatrix}$

при чему $m_{11} \neq 0$ и $m_{23} \neq 0$ због $\det M \neq 0$.

4.32. Одредити матрицу хомологије са центром $S(-1:1:3)$, осом $s: x_1+x_2+x_3=0$ и противосом $u: 3x_1+3x_2+2x_3=0$.

* У теоријском уводу смо већ коментарисали да се противоса реализује дуж треће врсте матрице па одмах у њу можемо уписати $(3,3,2)$ или нешто сразмерно том вектору и зато нека је матрица хомологије

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Све тачке са осе $[1;1;1]$ су фиксне, обично издвајамо неке са што више нула, нпр $(-1:0:1)$ и $(0:-1:1)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13}-a_{11} \\ a_{23}-a_{21} \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad a_{13} - a_{11} = 1 \qquad \Rightarrow \quad a_{11} = a_{13} - 1$

$\quad\quad a_{21} - a_{23} = 0 \qquad\quad a_{21} = a_{23}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} - a_{12} \\ a_{23} - a_{22} \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad a_{13} - a_{12} = 0 \qquad \Rightarrow \quad a_{12} = a_{13}$

$\quad\quad a_{23} - a_{22} = 1 \qquad\quad a_{22} = a_{23} - 1$

Матрица A је облика $\begin{pmatrix} a_{13}-1 & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21}-1 & a_{21} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и сада користимо

да је $S(-1:1;3)$ центар.

$$\begin{pmatrix} a_{13}-1 & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21}-1 & a_{21} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_{13}+a_{13}+3a_{13} \\ -a_{21}+a_{21}-1+3a_{21} \\ -3+3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{13}+1 \\ 3a_{21}-1 \\ 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

одакле је $3a_{13}+1=-2$ $\Rightarrow$ $a_{13}=-1$

$3a_{21}-1=2$ $\quad a_{21}=1$

Тражена хомологија има матрицу $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Довољно је проверити да је још једна тачка са $[1:1:1]$ нпр. $(-1:1:0)$ фиксна, чиме би обезбедили да $[1:1:1]$ буде оса, а $S(-1:1:3)$ фиксна тачка. Како колинеација дата матрицом A није идентитет она мора бити хомологија са траженим особинама.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.18. Конике реалне пројективне равни

Крива другог реда у еуклидској равни је скуп тачака $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину другог степена $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ где нису сви a_{11}, a_{12}, a_{22} једнаки нули.

Ако хомогенизујемо координате са $x = \frac{x_1}{x_3}$ и $y = \frac{x_2}{x_3}$ у претходној једначини и помножимо је са x_3^2 добијамо једначину

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

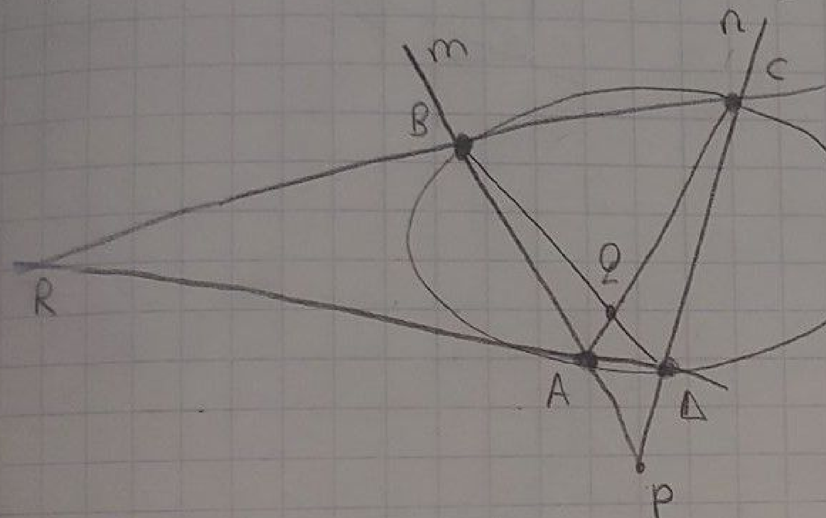
Свака крива другог реда, односно једначина из претходног реда може се записати у матричном облику и ако је $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ онда једначина постаје $X^T A X = 0$ при чему је матрица A симетрична.

- Узмемо недегенерисану конику и произвољну тачку P.

Полара је спојница додирних тачака тангенти из тачке P и конике.

Узмемо две праве m и n кроз P које секу конику у тачкама A и B, тј. C и D. Испоставља се да је полара тачке P спојница



дијагоналних тачака четвоространика ABCD

$R = (A \vee D) \wedge (B \vee C)$ и

$Q = (A \vee C) \wedge (B \vee D)$.

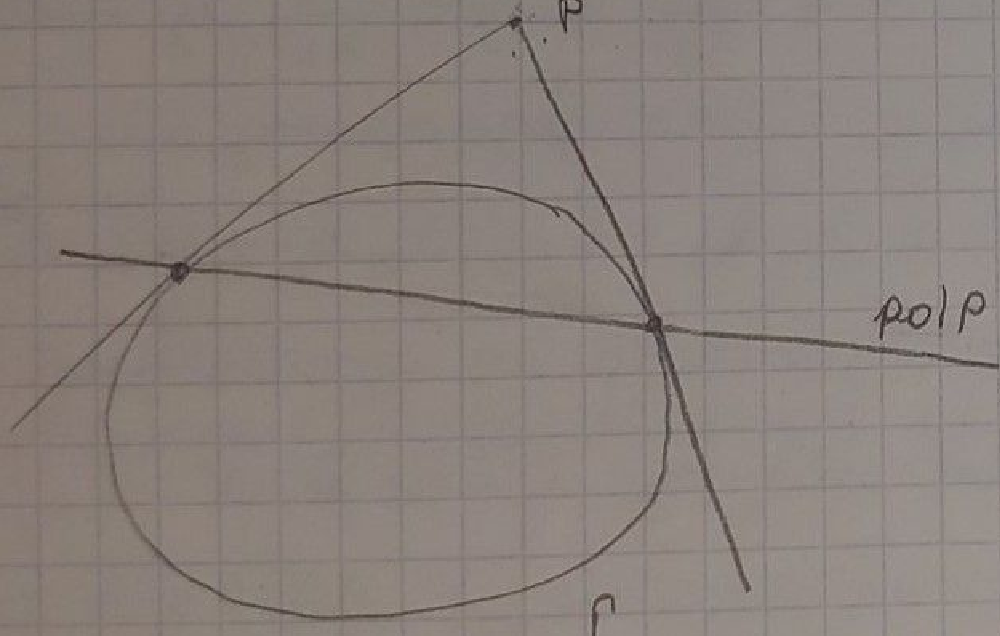
Ако тачка P припада коници онда је полара $pol P$ тангента у P.

- Полара тачке P се рачуна као $\overrightarrow{pol P} \sim A\vec{P}$ где је A матрица коју смо придружили коници.

- Пол праве q се рачуна као $\vec{q} \sim A\,\overrightarrow{pol\, q}$.

Дакле, ако тачка P припада коници (што проверавамо тако што испитамо да ли када заменимо координате дате тачке у једначину конике добијемо 0) онда се тангента и полара тачке P на конику поклапају.

У случају да тачка P не припада коници онда полару тачке P можемо добити као спојницу одговарајућих додирних тачака тангенти из тачке P на конику и саме конике



4.34. Дата је коника $\Gamma: 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$. Одредити једначину поларе тачке $A(1:0:1)$. Наћи, ако постоје, тангенте из A на криву Γ. Наћи пол праве $x_3 = 0$.

(*) Једначина конике је $X^T G X = 0$ где је њена матрица

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$2\cdot 1^2 + 0^2 - 2\cdot 1^2 - 0 + 0 = 0$

$A \in \Gamma$ па је тангента у A на конику баш полара

Полара тачке A се рачуна као

$$\overrightarrow{\mathrm{pol}A} \sim G\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

те је $\mathrm{pol}A = [2:-1:-2]$.

Како је $\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{pol}A} = (1,0,1)\cdot(2,-1,-2) = 2-2 = 0$ то $A \in \mathrm{pol}A$ и постоји само једна тангента кроз A на конику и то је баш полара $[2:-1:-2]$.

Пол праве $q\,[0:0:1]$ тражимо из $\vec{q} \sim G\overrightarrow{\mathrm{pol}q}$ те је $\overrightarrow{\mathrm{pol}q} \sim G^{-1}\vec{q}$

I НАЧИН

Нађимо инверз G^{-1}.

$$G_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 \qquad G_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 \qquad G_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$G_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \qquad G_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \qquad G_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$G_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad G_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad G_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$\det G = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2-4) + 3 \cdot 6 = 6$$

$$G^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -6 & -4 & -4 \\ -6 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{pol\,q} \sim \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -6 & -4 & -4 \\ -6 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad pol\,q = (6:4:7)$$

II НАЧИН

$$\vec{q} \sim G\,\overrightarrow{pol\,q}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$pol\,q = \left(\frac{3}{2} : 1 : \frac{7}{4}\right) = (6:4:7) \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} x_2 \\ x_3 = \frac{1}{2}(3x_1 - x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}x_2 - x_2\right) = \frac{7}{4}x_2 \end{cases}$$

$y=0$

4.36. Наћи једначину конике која додирује осу Ox у тачки $(3,0)$, осу Oy у тачки $(0,2)$ и додирује бесконачну праву.

⊛ Једначина конике је $X^T G X = 0$ где је њена матрица

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

За тачку $A(3:0:1)$ и Ox осу имамо везу пол-полара, као и за тачку $B(0:2:1)$ и Oy осу.

Из прве везе имамо $\overrightarrow{\text{pol}\, A} \sim G\vec{A}$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3a_{11} + a_{13} &= 0 \\ 3a_{13} + a_{33} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_{13} &= -3a_{11} \\ a_{33} &= -3a_{13} = 9a_{11} \end{aligned}$$

$$3a_{11} + a_{13} = 0 \qquad\qquad a_{13} = -3a_{11}$$
$$\Rightarrow$$
$$3a_{13} + a_{33} = 0 \qquad\qquad a_{33} = -3a_{13} = 9a_{11}$$

Из друге везе имамо $\overrightarrow{\mathrm{pol}B} \sim G\vec{B}$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2a_{22} + a_{23} = 0 \qquad\qquad a_{23} = -\frac{1}{2}a_{33} = -\frac{9}{2}a_{11}$$
$$\Rightarrow$$
$$2a_{23} + a_{33} = 0 \qquad\qquad a_{22} = -\frac{1}{2}a_{23} = \frac{9}{4}a_{11}$$

па је
$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -3a_{11} \\ a_{12} & \frac{9}{4}a_{11} & -\frac{9}{2}a_{11} \\ -3a_{11} & -\frac{9}{2}a_{11} & 9a_{11} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & -12a_{11} \\ 4a_{12} & 9a_{11} & -18a_{11} \\ -12a_{11} & -18a_{11} & 36a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & b & -12a \\ b & 9a & -18a \\ -12a & -18a & 36a \end{pmatrix}$$

$a_{11} = a \quad , a \neq 0$

$4a_{12} = b$

Коника $4ax_1^2 + 2bx_1x_2 - 24ax_1x_3 + 9ax_2^2 - 36ax_2x_3 + 36ax_3^2 = 0$ додирује $x_3 = 0$ што значи да постоји двоструко решење квадратне једначине $4ax_1^2 + 2bx_1x_2 + 9ax_2^2 = 0$. Дискриминанта ове једначине $(2b)^2 - 4 \cdot 4a \cdot 9a = 4(b^2 - 36a^2)$ мора бити нула, што нас доводи до потенцијалних решења $b = \pm 6a$.

$$\det G = \begin{vmatrix} 4a & b & -12a \\ b & 9a & -18a \\ -12a & -18a & 36a \end{vmatrix} = 4a \cdot \begin{vmatrix} 9a & -18a \\ -18a & 36a \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} b & -18a \\ -12a & 36a \end{vmatrix} - 12a \cdot \begin{vmatrix} b & 9a \\ -12a & -18a \end{vmatrix} =$$

$$= 4a \cdot 9a \cdot 18a \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - b \cdot (-18a) \begin{vmatrix} b & 1 \\ -12a & -2 \end{vmatrix} - 12a \cdot 9a \begin{vmatrix} b & 1 \\ -12a & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 18a \cdot 36a^2 \cdot 0 + 18ab(12a - 2b) - 12a \cdot 9a(-2b + 12a) =$$

$$= 36a(6ab - b^2 - 3a(-2b + 12a)) = 36a(-36a^2 + 12ab - b^2)$$

$\det G \neq 0$ па $b = 6a$ не долази у обзир јер би $-36a^2 + 12a \cdot 6a - 36a^2 = 0$

Преостаје $b = -6a$, и зато тражена коника има једначину

$$4x_1^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 9x_2^2 - 36x_2x_3 + 36x_3^2 = 0$$

4.38. Дате су тачке афине равни $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ и $D(0,1)$. У хомогеним координатама одредити формуле колинеације f при којој су тачке A и C фиксне, док се тачке B и D пресликавају редом у бесконачне тачке правих AB и AD. Одредити слике унутрашњости квадрата $ABCD$, као и круга $k(C, CB)$ при колинеацији f. Која је афина једначина криве $f(k)$?

(*) Преласком на хомогене координате имамо $A(0:0:1)$, $B(1:0:1)$, $C(1:1:1)$, $D(0:1:1)$. Права AB има једначину $x_2=0$ те је њена бесконачна тачка $E(1:0:0)$ (јер $(1,0,0)\cdot(0,1,0)=0$ и E је бесконачна тачка). Права AD има једначину $x_1=0$ те је њена бесконачна тачка $F(0:1:0)$. Колинеацију
$$\lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
једнозначно одређујемо из услова $(A,B,C,D) \xmapsto{f} (A,E,C,F)$

$$A(0,0,1) \xmapsto{f} A(0,0,1)$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{13}=0 \\ a_{23}=0 \\ a_{33}\neq 0 \end{matrix}$$

$$B(1,0,1) \xmapsto{f} E(1,0,0)$$

$$\lambda_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11}=\lambda_2 \\ a_{21}=0 \\ a_{31}+a_{33}=0 \quad (\star) \end{matrix}$$

$a_{22}\neq 0$

$C(1,1,1) \xrightarrow{f} C(1,1,1)$

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_3 &= a_{11} + a_{12} \\ \lambda_3 &= a_{22} \\ \lambda_3 &= a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{aligned}$$

$D(0,1,1) \xrightarrow{f} F(0,1,0)$

$$\lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= a_{12} \\ \lambda_4 &= a_{22} \\ 0 &= a_{32} + a_{33} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_3 &= a_{11} \\ \lambda_3 &= a_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{22} = a_{11}$$

$$a_{32} = -a_{33}$$

$$a_{11} = a_{22} = \lambda_3 = a_{31} \cancel{- a_{33} + a_{33}}$$

$$\Rightarrow a_{31} = a_{11}$$

$$a_{33} = -a_{31} \text{ из } (\star)$$

$$a_{32} = -a_{33} = a_{31} = a_{11}$$

$$a_{32} = a_{11}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ a_{11} & a_{11} & -a_{11} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Тражена колинеација је

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda x_1' = x_1$$

$$\lambda x_2' = x_2$$

$$\lambda x_3' = x_1 + x_2 - x_3$$

$a_{32} = a_{11}$

Једначина круга $k(C, CB)$ је $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ што после хомогенизације $x=\frac{x_1}{x_3}$ и $y=\frac{x_2}{x_3}$ даје $\left(\frac{x_1}{x_3}-1\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_3}-1\right)^2=1$ тј.

$$x_1^2-2x_1x_3+x_3^2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2=x_3^2$$ односно

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3-2x_2x_3=0.$$

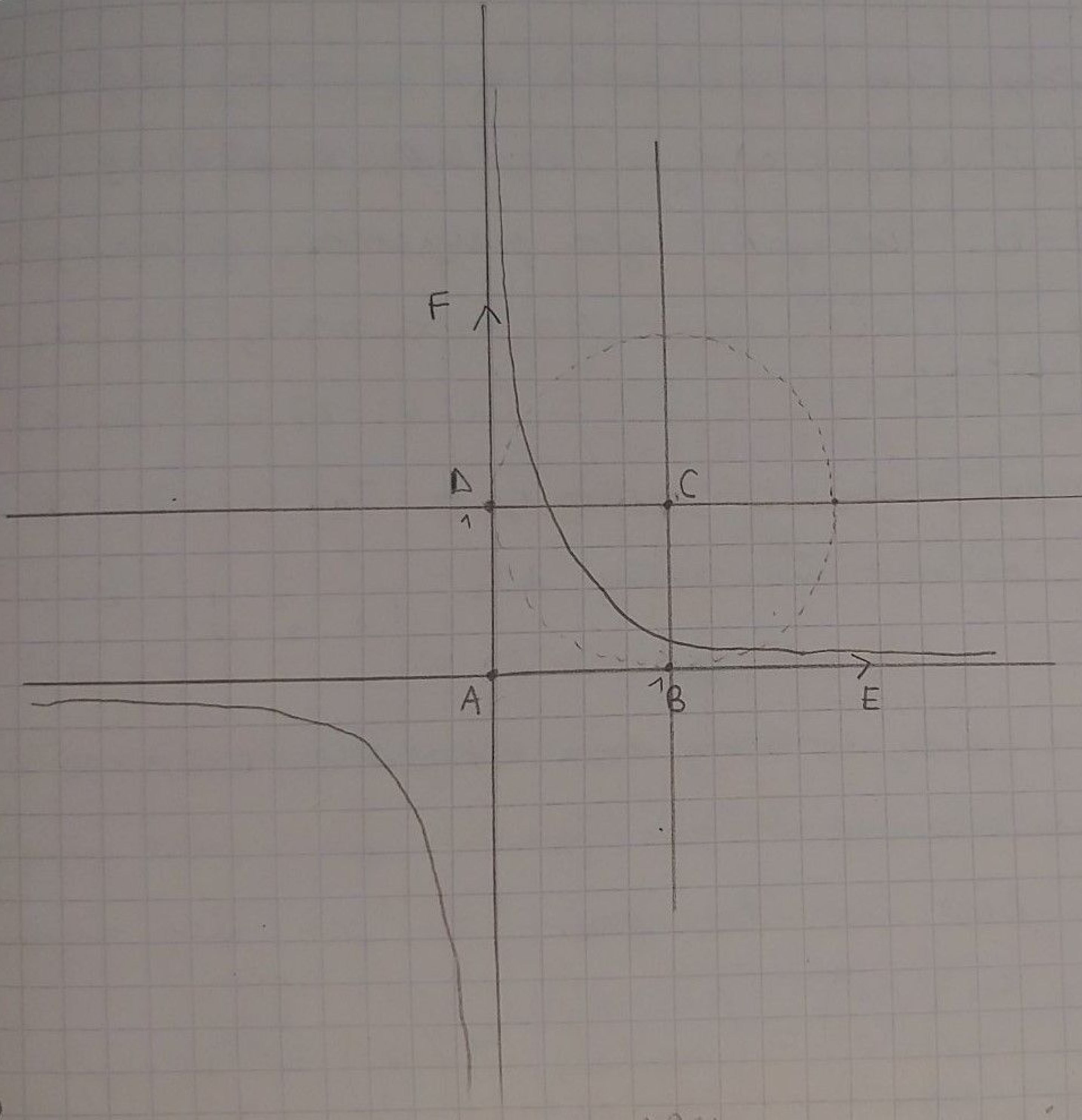
Инверзна колинеација је

$$x_1=x_1'$$

$$x_2=x_2'$$

$$x_3=x_1+x_2-x_3'=x_1'+x_2'-x_3'$$

па заменом у нашу једначину $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3-2x_2x_3=0$ добијамо $0=x_1'^2+x_2'^2+(x_1'+x_2'-x_3')^2-2x_1'(x_1'+x_2'-x_3')-2x_2'(x_1'+x_2'-x_3')$ тј. $x_1'^2+x_2'^2+x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+2x_1'x_2'-2x_1'x_3'-2x_2'x_3'-2x_1'^2-2x_1'x_2'+2x_1'x_3'-2x_2'x_1'-2x_2'^2+2x_2'x_3'=0$ тј. $x_3'^2-2x_1'x_2'=0$ што је хипербола $x'y'=\frac{1}{2}$



Слику унутрашњости квадрата ABCD при колинеацији f одредити за домаћи.

4.39. Дата је коника $\Gamma: x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ и тачка $A(1:2:1)$. Одредити тангенте из тачке A на конику Γ. Ако су T_1 и T_2 додирне тачке тангенти из A на Γ, одредити још неку конику која садржи тачке T_1 и T_2 и има за тангенте праве AT_1 и AT_2.

⊛ Матрица дате конике је

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$A \notin \Gamma$

$4+4-4-4+4 = 4 \neq 0$

Полару тачке A одређујемо помоћу

$$\overrightarrow{\mathrm{pol}\,A} \sim G\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

тј. полара тачке A је права $\mathrm{pol}\,A = [-4:2:4] = [-2:1:2]$.

Додирне тачке тангенти налазе се на полари, тако да је $\mathrm{pol}\,A \cap \Gamma = \{T_1, T_2\}$. Налазимо их решавањем система једначина $x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ и $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

Заменимо $2x_1 = x_2 + 2x_3$ из друге једначине у прву једначину и добијамо $\cancel{x_2^2} + \cancel{4x_3^2} - (\cancel{x_2} + 2x_3)x_2 - 2(x_2 + \cancel{2x_3})x_3 + 2x_2x_3 = 0$ односно $-2x_2x_3 = 0$. Добијамо два решења, у првом је $x_2 = 0$ што даје $T_1(1:0:1)$ јер $2x_1 = x_2 + 2x_3 = 2x_3$ тј. $x_1 = x_3$ односно тангенту $AT_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [2:0:-2] = [1:0:-1]$, а у другом случају је $x_3 = 0$ што даје $T_2(1:2:0)$ јер је $2x_1 = x_2 + 2x_3 = x_2$ односно тангенту $AT_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [-2:1:0] = [2:-1:0]$.

Сада тражимо још неку конику која садржи тачке T_1 и T_2 и има за тангенте праве AT_1 и AT_2.

Прво пишемо две везе пол-полара.

$$G'\vec{T_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{13} \\ a_{12} + a_{23} \\ a_{13} + a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{AT_1}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} a_{12} + a_{23} = 0 \\ a_{11} + a_{13} = -a_{13} - a_{33} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_{12} + a_{23} = 0 \\ a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0 \end{matrix}$$

$$G'\vec{T_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{13} \\ a_{12}+a_{23} \\ a_{13}+a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{AT_1}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a_{12}+a_{23} &= 0 \\ a_{11}+a_{13} &= -a_{13}-a_{33} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_{12}+a_{23} &= 0 \\ a_{11}+2a_{13}+a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

$$G'\vec{T_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+2a_{12} \\ a_{12}+2a_{22} \\ a_{13}+2a_{23} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{AT_2}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a_{13}+2a_{23} &= 0 \\ a_{11}+2a_{12} &= -2a_{12}-4a_{22} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_{13}+2a_{23} &= 0 \\ a_{11}+4a_{12}+4a_{22} &= 0 \end{aligned}$$

Нека је $a = \frac{1}{4}a_{11}$ и $b = a_{23}$ и тада је $a_{13} = -2a_{23} = -2b$,

$a_{12} = -a_{23} = -b$, $a_{33} = -a_{11} - 2a_{13} = -4a + 4b$, $a_{22} = -\frac{1}{4}a_{11} - a_{12} = -a+b$

па је матрица тражене конике облика

$$G' = \begin{pmatrix} 4a & -b & -2b \\ -b & -a+b & b \\ -2b & b & -4a+4b \end{pmatrix}$$

$$\det G' = \begin{vmatrix} 4a & -b & -2b \\ -b & -a+b & b \\ -2b & b & -4a+4b \end{vmatrix} = 4a \cdot \begin{vmatrix} -a+b & b \\ b & -4a+4b \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} -b & b \\ -2b & -4a+4b \end{vmatrix} - 2b \cdot \begin{vmatrix} -b & -a+b \\ -2b & b \end{vmatrix}$$

$$= 4a\left(4a^2 - 8ab + 3b^2\right) + b\left(4ab - 2b^2\right) - 2b\left(+b^2 - 2ab\right) =$$

$$= 16a^3 - 32a^2b + \underline{12ab^2} + \underline{4ab^2} - 2b^3 - 2b^3 + \underline{4ab^2} = 16a^3 - 32a^2b + 20ab^2 - 4b^3 =$$

$$= 4\,(4a^3 - 8a^2b + 5ab^2 - b^3) = 4\,(a-b)(2a-b)^2$$

$a = b \qquad 4a^3 - 8a^3 + 5a^3 - a^3 = 0$

$$4a^3 - 8a^2b + 5ab^2 - b^3 : (a-b) = 4a^2 - 4ab + b^2 = (2a-b)^2$$

$$\begin{array}{l}
4a^3 - 8a^2b + 5ab^2 - b^3 \\
\underline{-(4a^3 - 4a^2b)} \\
\quad -4a^2b + 5ab^2 - b^3 \\
\quad \underline{-(-4a^2b + 4ab^2)} \\
\qquad ab^2 - b^3 \\
\qquad \underline{-(ab^2 - b^3)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\det G' \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ Не одговарају нам само $b = a$ и $b = 2a$.

Наша почетна коника има $a = 0$ и $b = 1$.

Другу конкретну конику можемо добити за $a = 1$ и $b = 0$

што даје $4x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 = 0$.