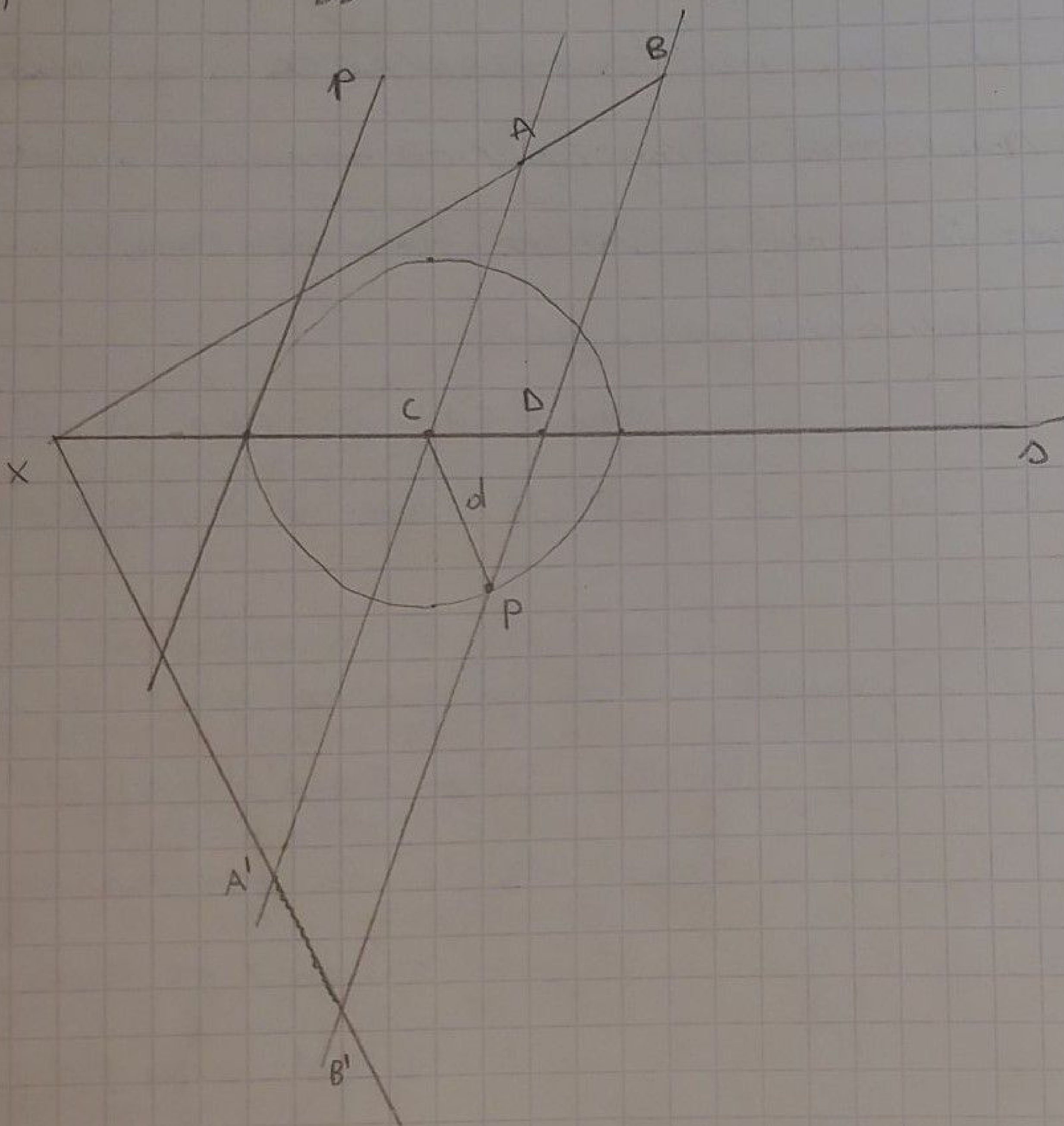
Већ смо видели да је перспективна афиности хомологија $(S \notin s)$ код које је центар бесконачна тачка док оса није бесконачна права. Уколико нам је дат пар одговарајућих тачака, онда знамо да је центар бесконачна тачка њихове спојнице. Зато су све спојнице одговарајућих тачака међусобно паралелне и чине такозване <u>зраке афиности</u>. Бесконачна права је фиксна (јер садржи центар) па се бесконачне тачке сликају у бесконачне. тј. перспективна афиности чува паралелност. Размера је инваријанта, као и однос у ком тачка дели дуж.

(3.22.) Дата је дуж AB и праве p и s. Одредити перспективну афиност чија је оса s, зраци афиности су паралелни са p, а слика дужи AB има дату дужину d.

(*)

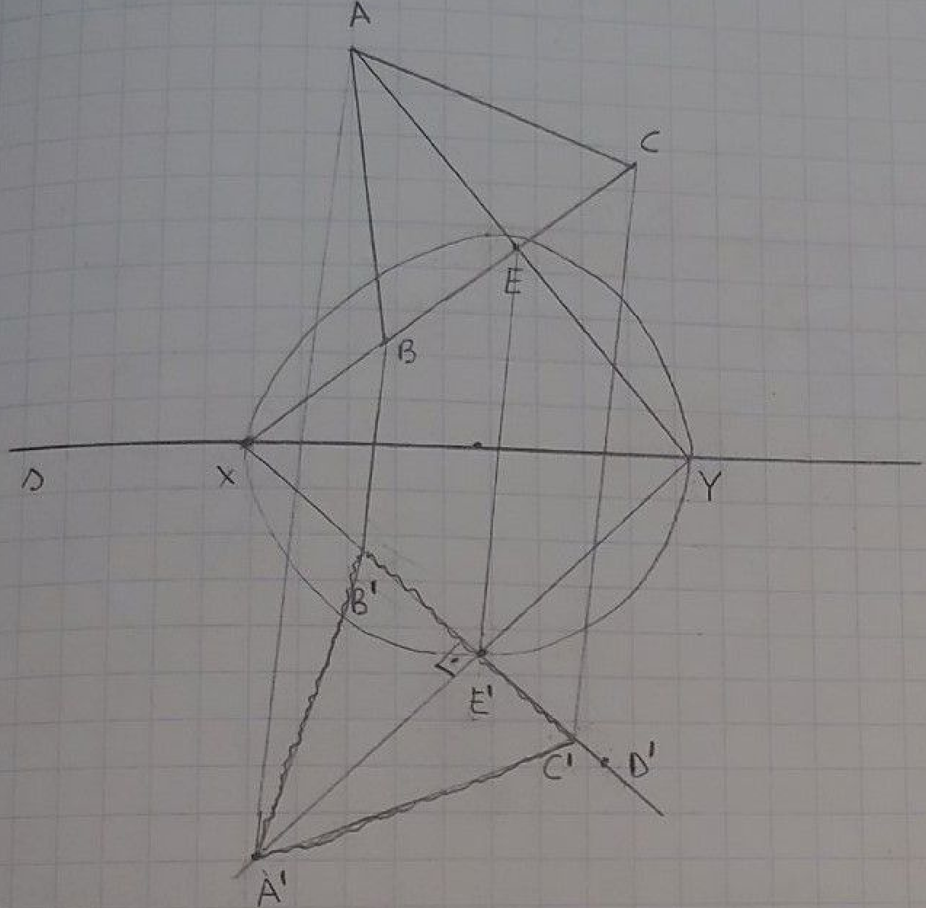


Нека је $X = AB \wedge s$. По леми 1.51. знамо $X \in A'B'$ (јер су праве AB, $A'B'$ и s конкурентне), а знамо и $AA' \parallel BB' \parallel p$. За $C = AA' \wedge s$ и $D = BB' \wedge s$ можемо да нађемо тачку $P \in BB'$ такву да је $CP \parallel A'B'$ јер је тада $CPB'A'$ паралелограм (јер су му оба пара наспрамних страница паралелне праве), одакле је $CP \cong A'B' \cong d$.

Конструкција: Конструишемо праве паралелне са p кроз A и B и њихове пресечне тачке са s означимо са C и D. Конструишемо тачку P у пресеку праве BD и круга са центром у тачки C и полупречника d. Тачке A' и B' су пресеци праве кроз $Y = AB \wedge s$ паралелне правој CP са AC, односно BD.

Број решења зависи од броја пресека праве BD и круга са центром C и полупречником d. Нека је r растојање између паралелних правих AA' и BB'. Ако је $d<r$ нема решења, ако је $d=r$ имамо јединствено решење задатка. У општем случају је $d>r$ када имамо два решења. У случају $AB \parallel D$ задатак нема решења осим ако већ важи $AB \cong d$. (јер је $ABB'A'$ паралелограм у том случају због $AB \parallel D \parallel A'B'$ и $AA' \parallel BB' \parallel p$)

3.23. Дата је права D и тачке A, B, C, D'. Перспективна афиност са осом D слика троугао ABC у једнакокраки троугао $A'B'C'$ са основицом $B'C'$, тако да D' лежи на правој $B'C'$. Конструисати троугао $A'B'C'$ у општем случају.



Ако је E средиште дужи BC, како афиности чува односе дељења дужи то се тачка E слика у средиште E' дужи $B'C'$. Како је $A'B' \cong A'C'$, то је E' подножје висине троугла $A'B'C'$ из темена A'.

У општем случају постоје пресеци $X = BC \cap s$ и $Y = AE \cap s$, за које важи $X \in B'C'$ и $Y \in A'E'$ по леми 1.51. Како је права на којој су тачке B', C', E' и X нормална на праву на којој су тачке

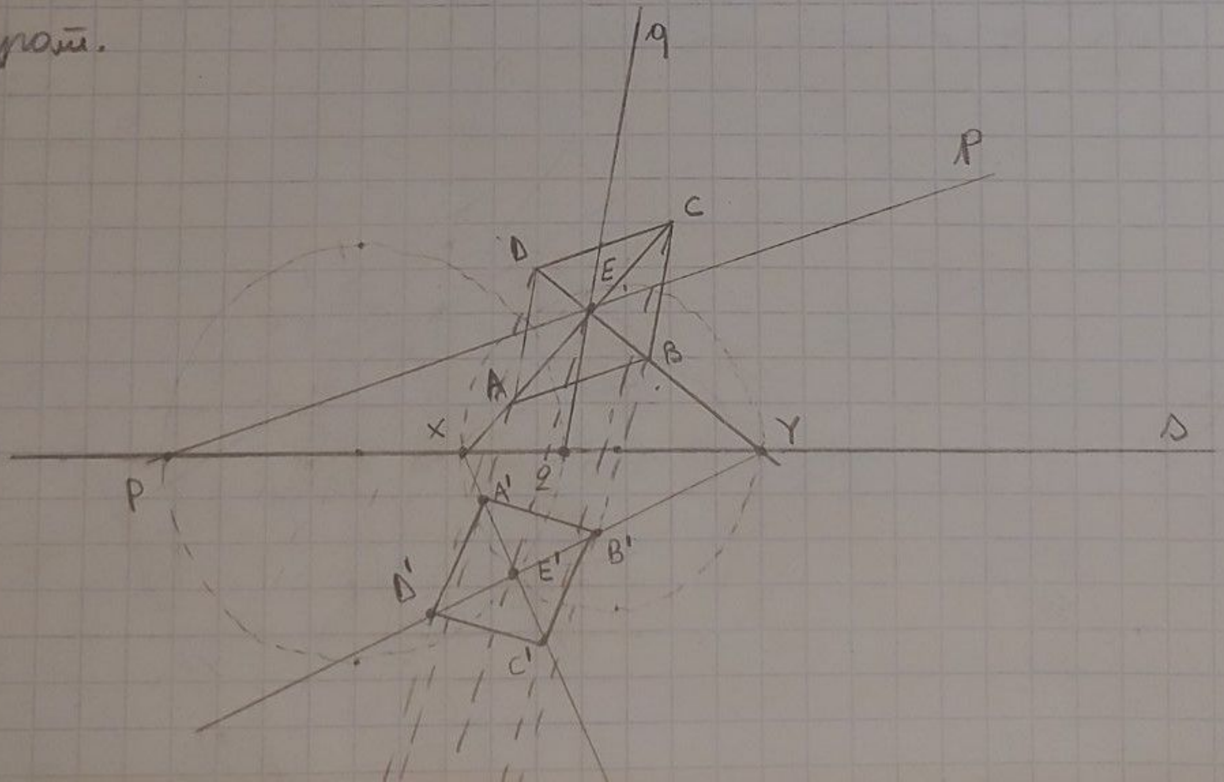
← права

A', E' и Y и E' ∈ B'C'Δ'X што је E' подножје висине из Y на Δ'X.

Зато E' мора бити на кругу над пречником XY, те имамо једнозначно $X \neq E' \in k(XY) \cap \Delta'X$. Перспективна афиност је одређена осом Δ и паром тачака E и E'. Тачке B' и C' добијамо у пресеку праве XΔ' са правом паралелној EE' кроз B, односно C, а тачку A' можемо добити у пресеку YE' и праве кроз A паралелне са EE'.

3.24. Дата је права Δ и четвороугао ABCΔ. Одредити перспективну афиност која има осу Δ, а дати четвороугао пресликава у квадрат.

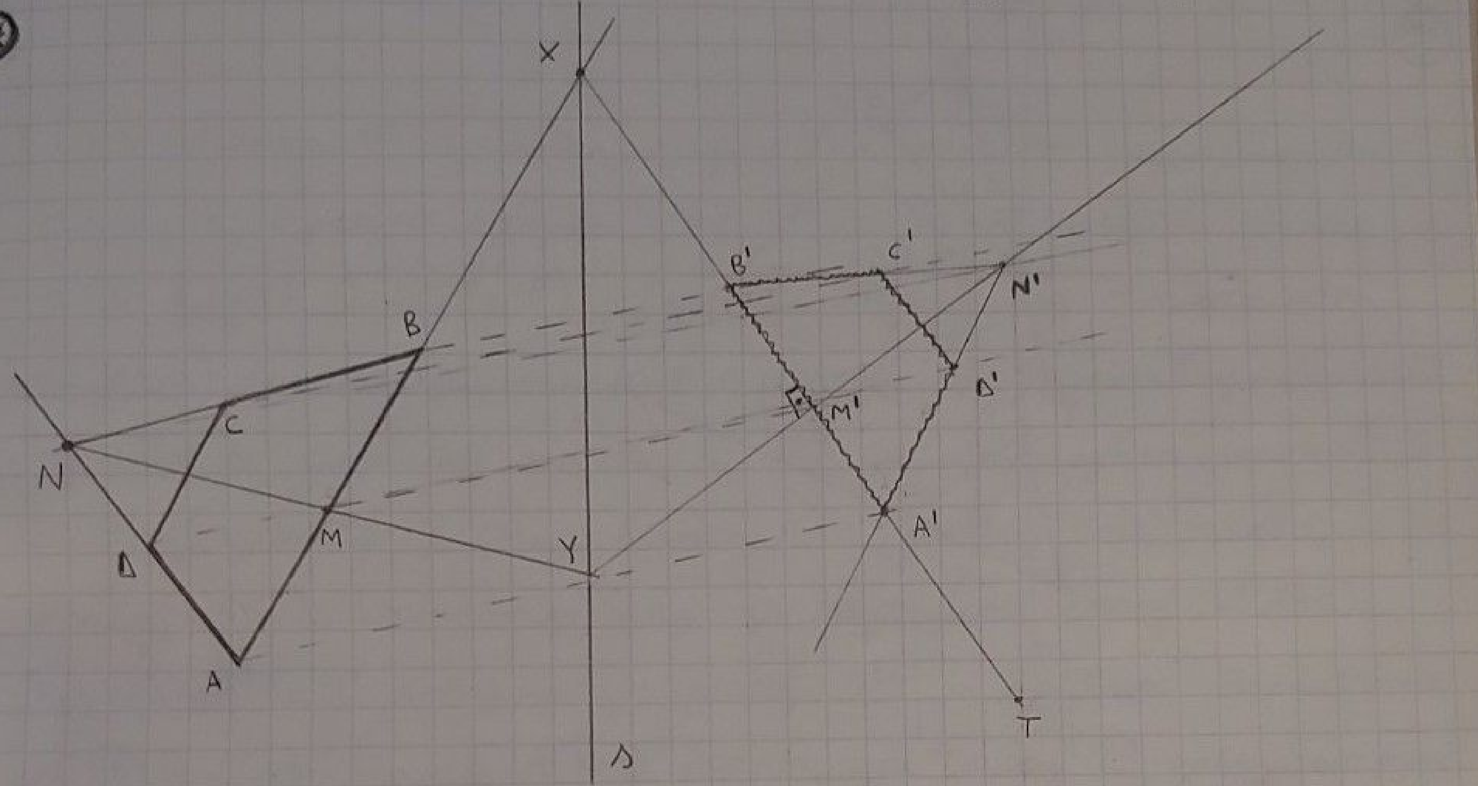
(*)



Перспективна афиност чува паралелности, те уколико $ABCD$ није паралелограм задатак нема решења. Посматрајмо тачку $E = AC \cap BD$ која се слика у центар $E' = A'C' \cap B'D'$ квадрата $A'B'C'D'$. Нека су p и q праве за које важи $E \in p \parallel AB \parallel CD$ и $E \in q \parallel AD \parallel BC$. Сада ће $A'B'C'D'$ бити квадрат ако и само ако је $\measuredangle p'E'q' = \frac{\pi}{2} = \measuredangle A'E'B'$. Са једне стране, како је $A'C' \perp B'D'$ (јер је $A'B'C'D'$ квадрат) важи да $E' \in k(XY)$ где је $X = AC \wedge \Delta$ и $Y = BD \wedge \Delta$ слично као у већ урађеним задацима а са друге стране из $p' \perp q'$ важи $E' \in k(PQ)$ где је $P = p \wedge \Delta$, $Q = q \wedge \Delta$. Одавде закључујемо да E' морамо бирати из пресека два круга, $E' \in k(XY) \cap k(PQ)$, а након тога је перспективна афиност одређена осом Δ и паром тачака E и E'.

3.27. Дат је четвороугао $ABCD$, тачка T и права s. Одредити перспективну афиност која има осу s, а дати четвороугао пресликава у једнакокраки трапез на чијој основици лежи T.

⊛

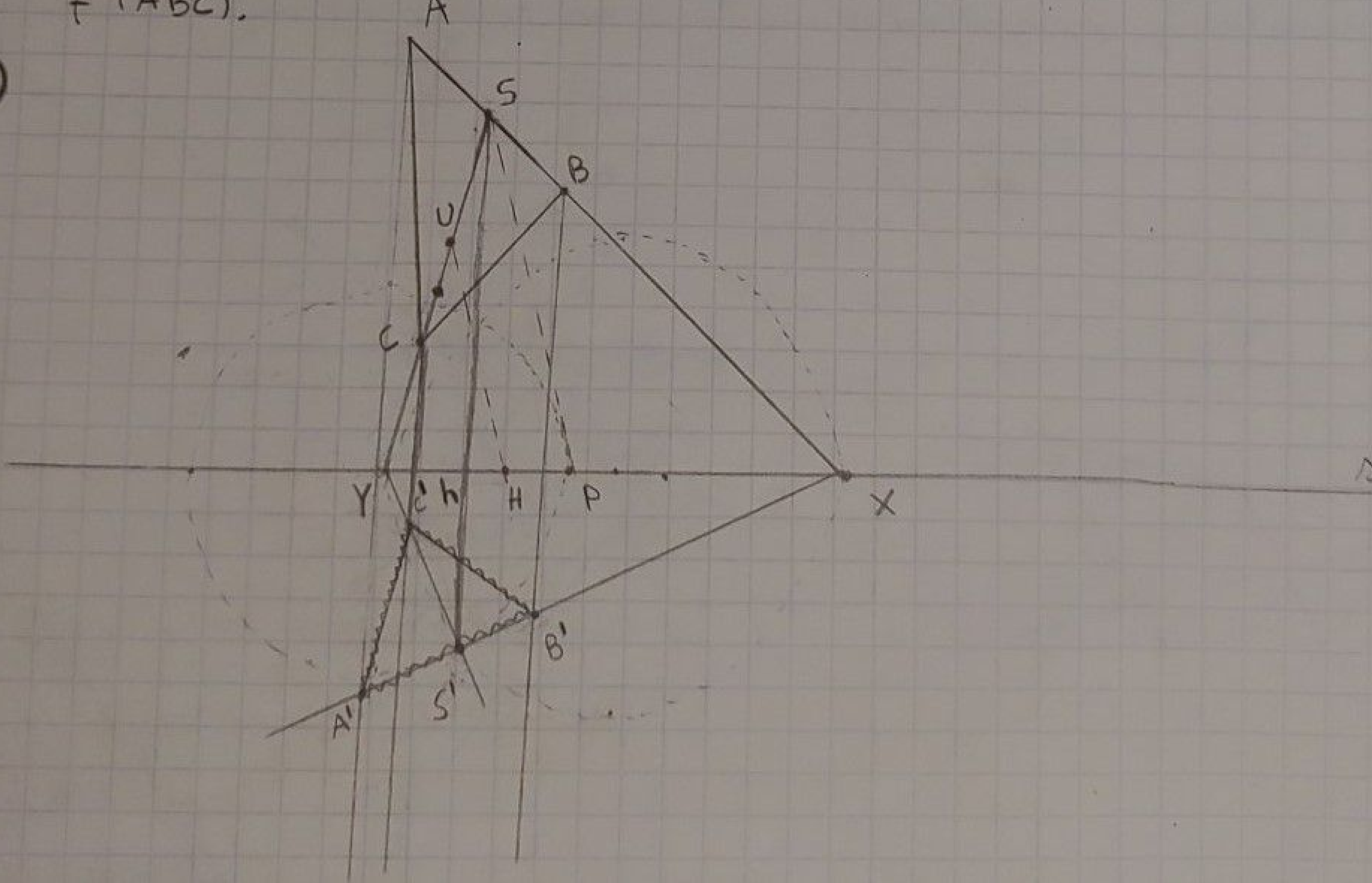


Без умањења општости нека су основице једнакокраког трапеза $A'B'C'D'$ странице $C'D'$ и $A'B' \ni T$. Пошто перспективна афиност чува паралелност и $A'B' \parallel C'D'$ то мора бити $AB \parallel CD$, па четвороугао $ABCD$ који је дат мора бити трапез. Ако је M средиште дужи AB и $N = AD \wedge BC$ и перспективна афиност чува средишта дужи то је M' средиште дужи $A'B'$. По услову задатка трапез $A'B'C'D'$ је једнакокраки тј. $A'D' \cong B'C'$, а како је $A'B' \parallel C'D'$ то применом Талесове теореме имамо $1 = \frac{A'D'}{B'C'} = \frac{N'A'}{N'B'}$ тј. $\triangle A'B'N'$

је једнакокраки што повлачи да $A'M' \perp M'N'$. За $X = AB \wedge \Delta$ и $Y = MN \wedge \Delta$ имамо $A'B'TXM'$ праве $\perp N'YM'$, па тачка M' представља подножје нормале из тачке Y на праву TX. Перспективна афиност је одређена осом Δ и паром одговарајућих тачака M и M' (центар је бесконачна тачка која одговара правој MM', па можемо применити задатак 3.13.).

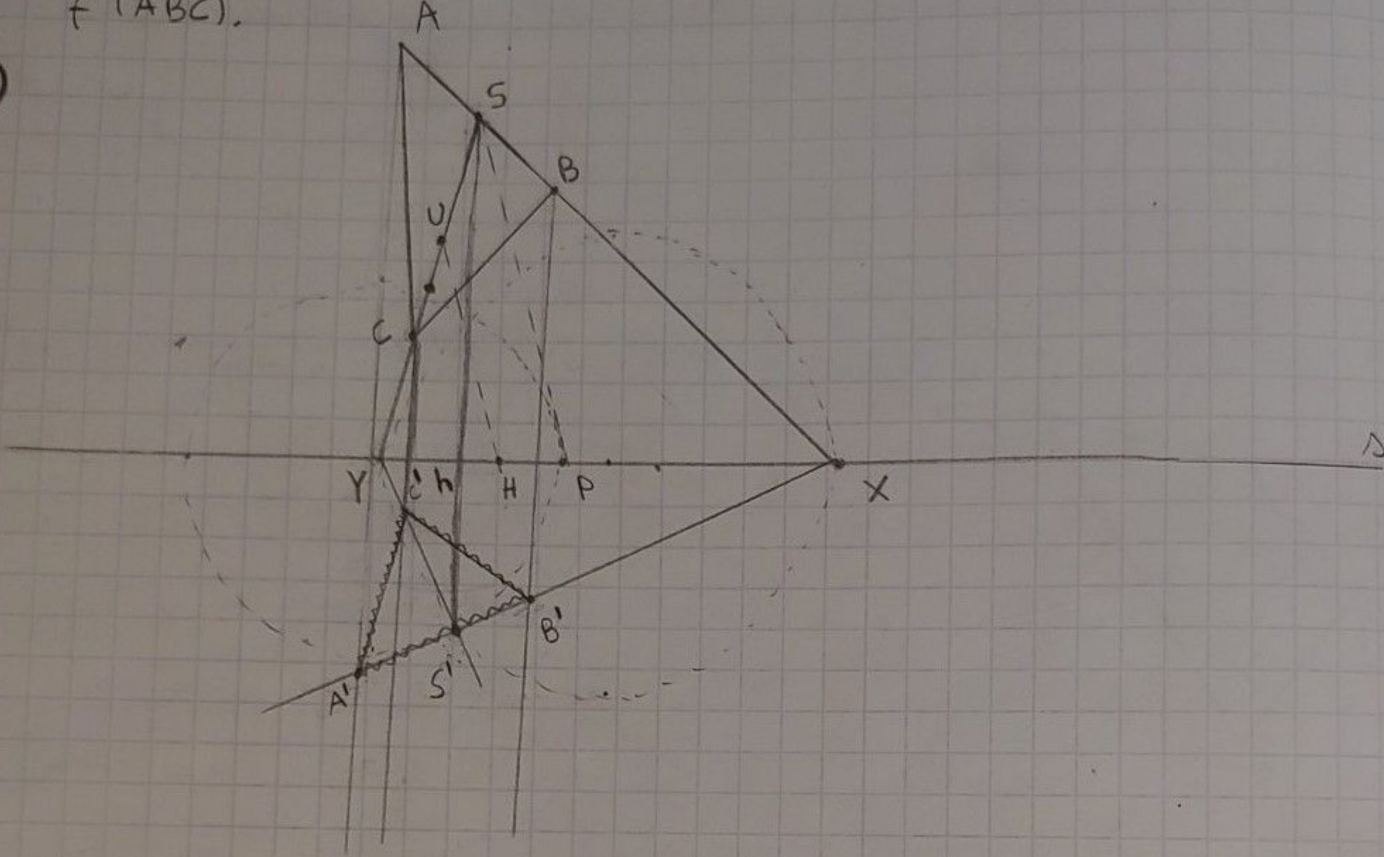
3.28. Дат је троугао ABC, права Δ и дуж h. Перспективна афиност f има осу Δ, а слика дат троугао у једнакокраки троугао чија је висина која одговара основици подударна са h. Одредити слику $f(ABC)$.

✱



f(ABC).

(*)



Нека је AB страница датог троугла ABC која се слика у основицу $A'B'$ једнакокраког троугла $A'B'C'$, и уочимо тачку S која је њено средиште. Тада је $A'B' \perp S'C'$ што слично као у већ виђеним задацима значи да $S' \in k(XY)$ тј. S припада кругу над пречником XY где је $X = AB \wedge s$ и $Y = CS \wedge s$. Желимо да искористимо услов

$C'S' \cong h$. Перспективна афиност вноси да је $CC' \parallel SS'$ па применом Талесове теореме добијамо $YS : CS = YS' : C'S'$ одакле можемо конструисати дужину YS'. Један од начина да то елегантно урадимо је да уочимо тачку U која је симетрична тачки C у односу на средиште дужи YS одакле је $YU = CS$. На правој s уочимо тачку H такву да је $YH \cong h$, а затим уочимо и тачку P у којој права кроз S паралелна са UH сече YH, да бисмо применом Талесове теореме добили

$$YS' : C'S' \underset{CC' \parallel SS'}{=} YS : CS = YS : YU \underset{UH \parallel SP}{=} YP : YH$$

тј. $YS' : C'S' = YP : YH$

$C'S' \cong h \cong YH$

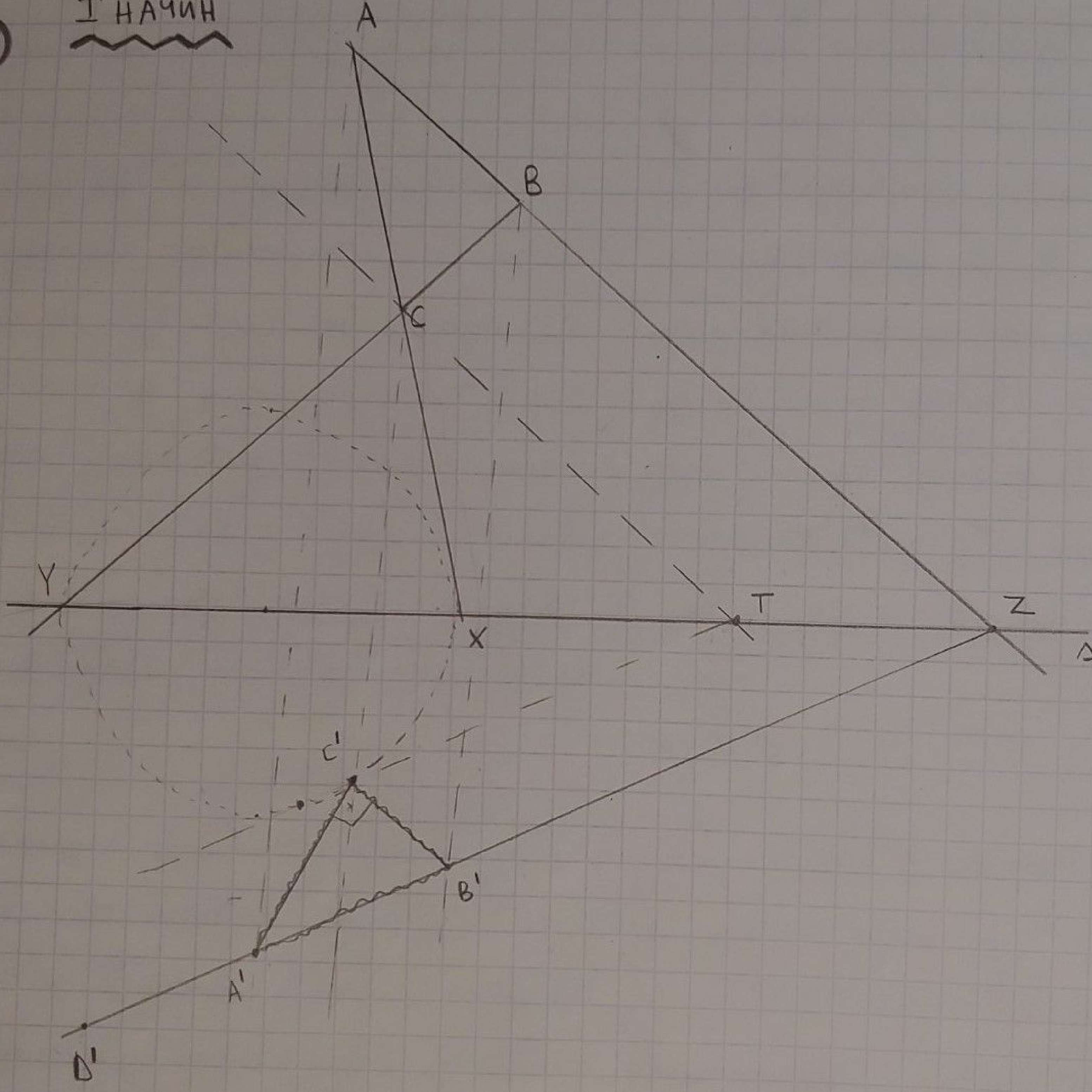
$\Downarrow$

$YS' \cong YP$

$\Rightarrow$ Тачка S' припада кругу са центром Y који садржи тачку P односно кругу $k(Y, YP)$. Након избора тачке $S' \in k(XY) \cap k(Y, YP)$ (у општем случају постоје два решења) имамо једнозначно одређену перспективну афиност јер нам је позната оса s и пар одговарајућих тачака S и S' (центар је онда бесконачна тачка која одговара правој SS'). Остало је још да одредимо слику $f(ABC)$. Темена A' и B' добијамо у пресеку S'X и правих паралелних са SS' кроз тачке A и B редом, док тачку C' добијамо као сечиште праве YS' и праве кроз тачку C паралелне са SS' и тако добијамо слику $f(ABC)$.

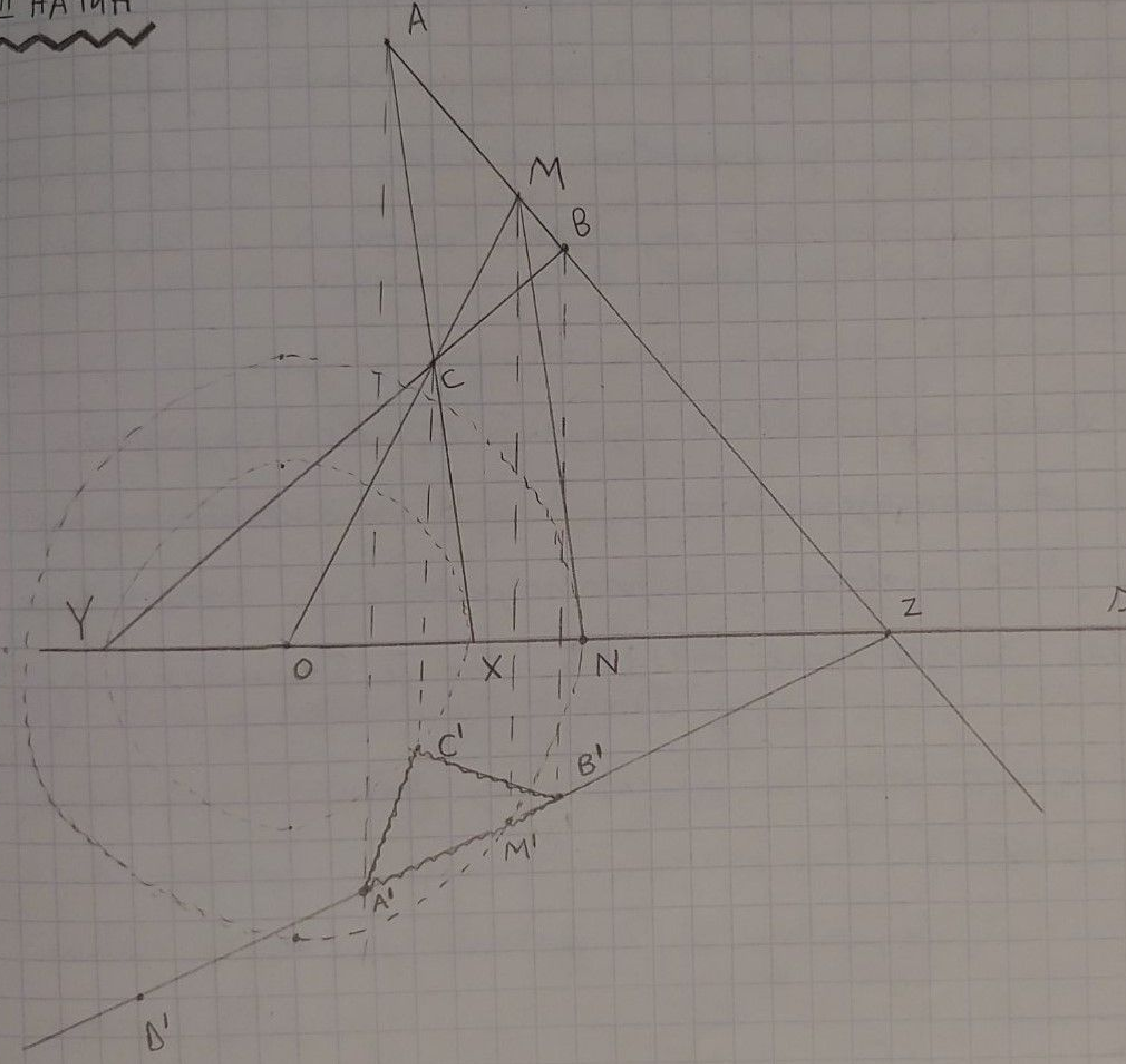
3.29. Дата је права s и тачке A, B, C, D'. Одредити перспективну афиност са осом s која слика троугао ABC у троугао A'B'C' са правим углом код темена C', док права A'B' пролази кроз D'.

(✱) I НАЧИН



Нека је $X = AC \wedge s$, $Y = BC \wedge s$, $Z = AB \wedge s$. Како је $A'C' \perp B'C'$ јер је по услову задатка угао код темена C' прав у троуглу $A'B'C'$ то као у ранијим задацима имамо $C' \in k(XY)$, а важи и $A', B' \in D'Z$. Уочимо праву кроз тачку C паралелну са AB која сече s у тачки T. Како перспективна афиност чува паралелност и $CT \parallel AB$ то $C'T \parallel A'B'$ тј. $C'T \parallel D'Z$. Зато тачку C' можемо наћи у пресеку праве кроз T паралелне са $D'Z$ и круга $k(XY)$. Даље је перспективна афиност једнозначно одређена осом s и паром тачака C и C'.

II НАЧИН

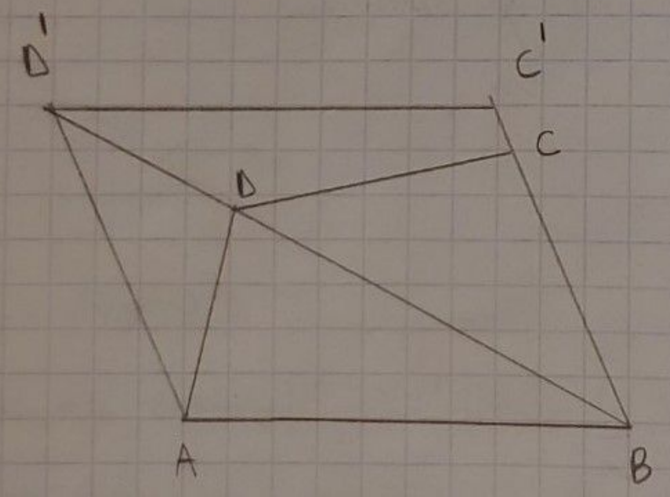


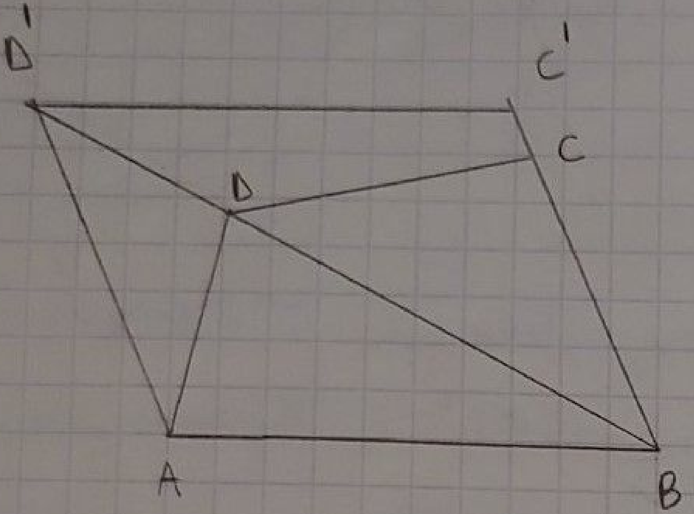
Аналогно као у првом начину закључујемо да $C' \in k(XY)$ где је $X = AC \wedge \Delta$ и $Y = BC \wedge \Delta$, и да $A', B' \in \Delta' Z$. Желимо да обједининимо ове информације у односу на једну тачку, а најпогоднија је $M = AB \wedge CO$, где је O средиште дужи XY. Тачка M се слика у тачку $M' = \Delta' Z \wedge C'O$ а како перспективна афиност чува однос дељења дужи то је $OM : OC = OM' : OC'$. Кључно је да нам је позната дужина дужи OC' која је једнака полупречнику круга $k(XY)$ односно половини дужине дужи XY, а имамо и конкретне дужине дужи OM и OC па можемо одредити дужину дужи OM'. Нпр. можемо уочити тачку N у пресеку праве Δ и праве кроз M паралелне са AC, одакле применом Талесове теореме добијамо $\underline{OM' : OC'} = OM : OC \underset{\uparrow \atop MN \parallel AC}{=} \underline{ON : OX}$ и $OX \cong OC'$ (обе дужи у дужине полупречника $k(XY)$)

односно $ON \cong OM'$. Зато је тачка M' на кругу са центром O који садржи тачку N тј. $k(O, ON)$, а и на правој $D'Z$ те је можемо добити у њиховом пресеку. Даље је перспективна афиност једнозначно одређена осом s и паром тачака M и M'.

3.18. Дат је четвороугао $ABCD$ који није трапез. Одредити све перспективне колинеације којима су A и B фиксне тачке, док четвороугао $ABCD$ преводе у паралелограм.

(*) Све фиксне тачке чине $s \cup \{S\}$, где је S центар, а s оса.

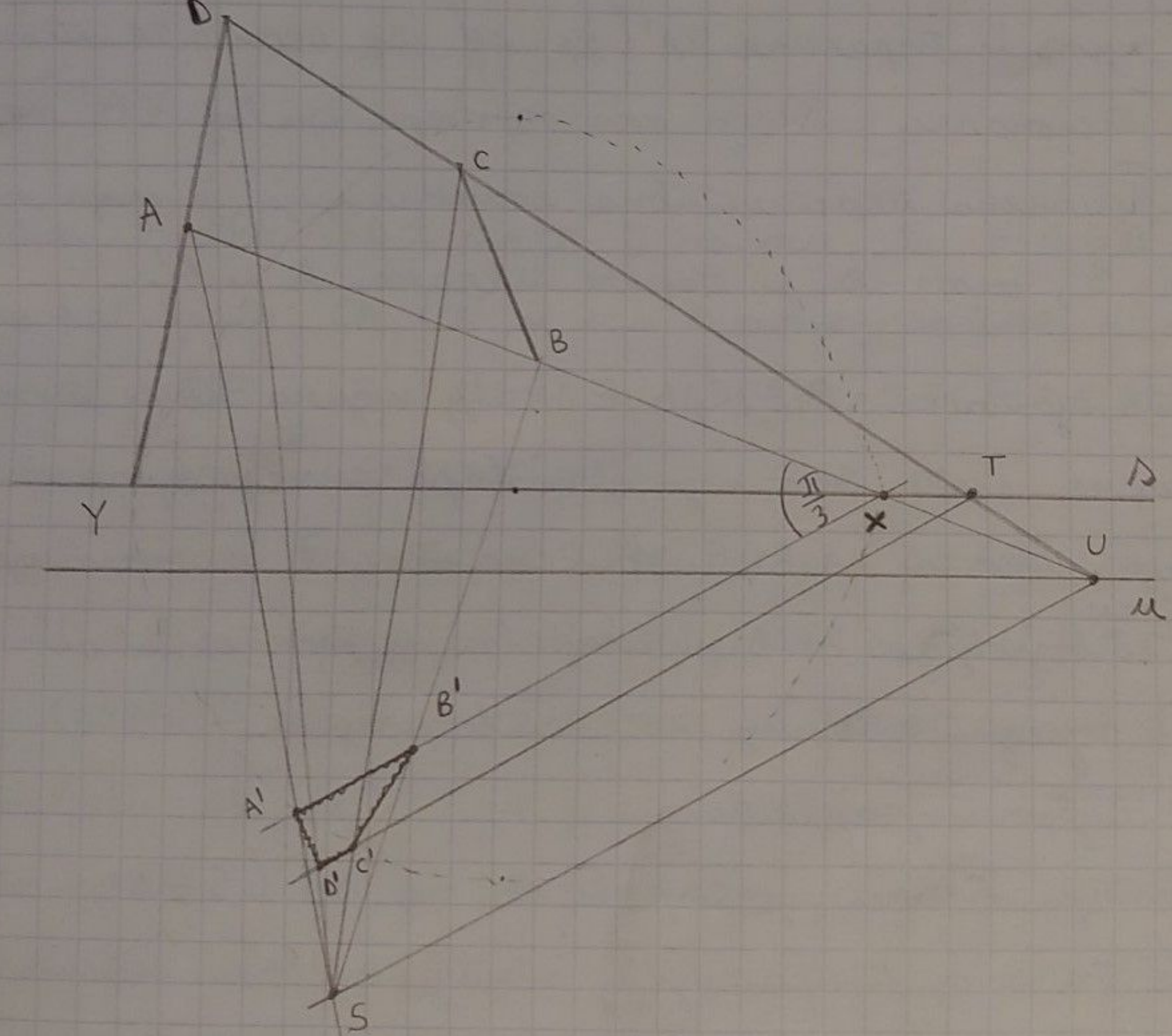




За $A \neq S \neq B$ имали бисмо $s = AB$ јер су A и B фиксне тачке па су праве CD, $C'D'$ и $s = AB$ конкурентне. Како је $ABC'D'$ паралелограм то је $AB \parallel C'D'$ и онда се CD, $C'D'$ и AB секу у бесконачној тачки односно паралелне су па је $AB \parallel CD$ што је у контрадикцији са претпоставком у задатку да $ABCD$ није трапез. Зато центар S мора бити једна од тачака A или B. Размотрићемо случај $S = B$ (случај $S = A$ се спроводи аналогно симетријом по A и B). Када је центар $S = B$ на основу Леме 1.51 имамо да $C' \in BC$ и $D' \in BD$, а како је

$ABC'D'$ паралелограм имамо $BC' \parallel AD'$ па је тачка D' сециште праве BD и праве кроз тачку A паралелне са $\underbrace{BC' = BC}_{\text{праве}}$ (јер $C' \in BC$) док је тачка C' сециште праве BC и праве кроз D' паралелне AB.
Сада имамо центар $S = B$, пар одговарајућих тачака нпр. C и C' и оса је права која садржи тачку A (која је фиксна) и тачку $CD \wedge C'D'$ (јер су по Леми 1.51 праве CD, $C'D'$ и оса p конкурентне праве) па је тражена перспективна колинеација једнозначно одређена.

3.19. Дат је четвороугао ABCD који није трапез и права s. Одредити перспективну колинеацију са осом s која четвороугао ABCD преводи у правоугли трапез A'B'C'D' са основицом C'D' и правим углом код темена A', тако да је угао између AB и A'B' једнак $\frac{\pi}{3}$.

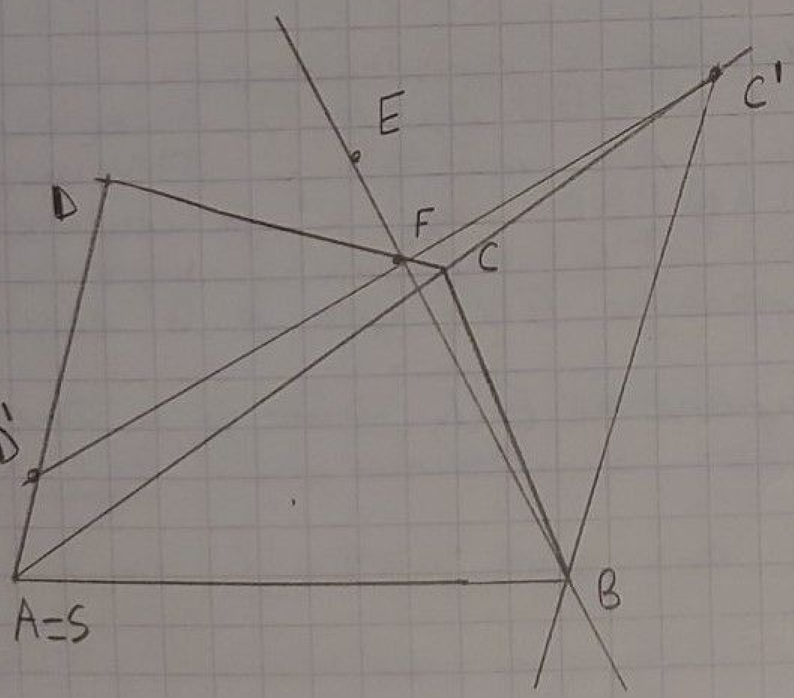


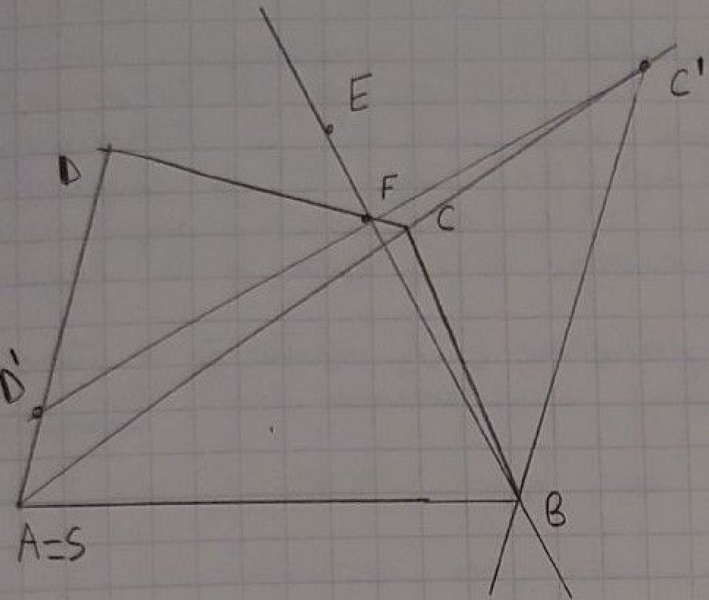
Како је $A'B'C'D'$ трапез по услову задатка то је $A'B' \parallel C'D'$ тј. $A'B'$ и $C'D'$ се секу у бесконачној тачки па је тачка $U = AB \wedge CD$ тачка противосе (јер се слика у бесконачну тачку). Зато се по Леми 1.70. противоса може добити као права u која садржи тачку U и паралелна је оси Δ. Прав угао код темена A' реализујемо као $A' \in k(XY)$ где је $X = AB \wedge \Delta$ и $Y = AD \wedge \Delta$ као у ранијим задацима, а услов $\measuredangle(AB, A'B') = \frac{\pi}{3}$ заправо значи да је $\measuredangle AXA' = \frac{\pi}{3}$ па тачку A' добијамо у пресеку круга над пречником XY и праве кроз X која са AX заклапа угао $\frac{\pi}{3}$. Тачка U се слика у бесконачну тачку праве XA' (јер је $U = AB \wedge CD$ и слика се у бесконачну тачку која одговара паралелним правама $A'B'$ и $D'C'$ тј. правој XA') тако да центар S колинеације мора бити седиште AA' (јер су по Леми 1.51 тачке A, S и A' колинеарне) и праве кроз U паралелне XA' (јер су по Леми 1.51 тачке U, S и бесконачна тачка која одговара правој XA' колинеарне). Тражена перспективна колинеација је сада одређена центром S, осом Δ и паром тачака A и A'.

3.20. Дате су тачке A, B, C, Δ, E међу којима нема три колинеарне, нити било која два пара није паралелне спојнице. Ако су A, B, E фиксне тачке хомологије f која четвороугао $ABC\Delta$ пресликава у трапез са основицом $f(BC)$, одредити слику тог четвороугла $f(ABC\Delta)$ у свим могућим случајевима.

✱ Хомологија f има центар S и осу Δ $(S \notin \Delta)$ и све фиксне тачке од f припадају скупу $\Delta \cup \{S\}$. Разликујемо два случаја у зависности од тога да ли је тачка E центар или није.

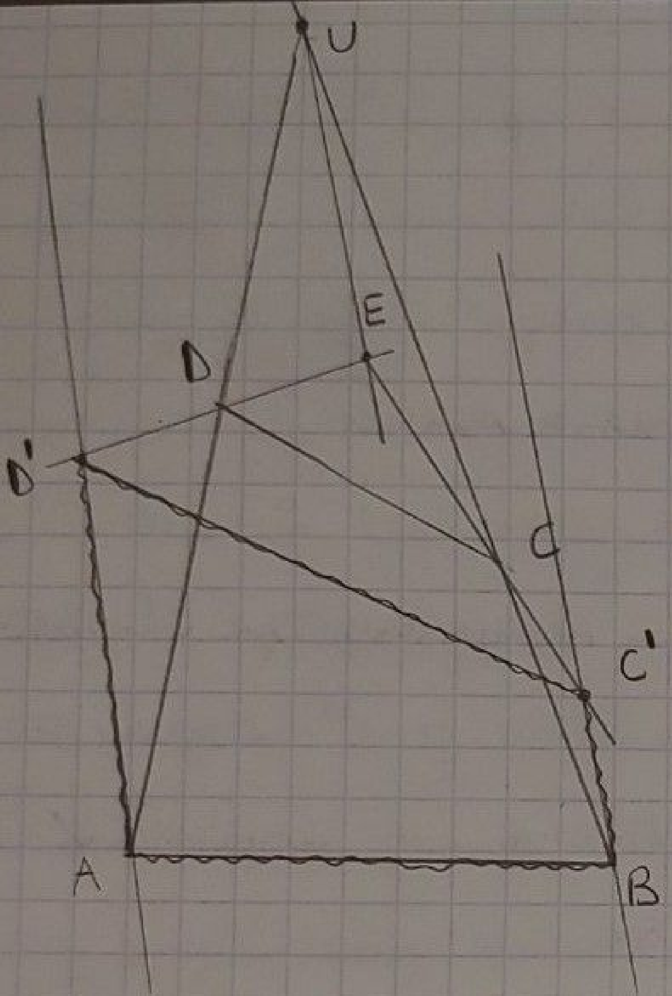
• Ако тачка E није центар онда имамо две опције, прва је да је $S=A$ и $\Delta=BE$, а друга је да $S=B$ и $\Delta=AE$ (јер су по услову задатка тачке A, B и E фиксне и нису колинеарне). Размотримо прву опцију (друга се решава аналогно пермутовањем слова A и B) тј. $S=A$ и $\Delta=BE$. По леми 1.51 имамо $C'\in AC$ и $D'\in AD$. Како је $ABC'D'$ трапез са основицама BC' то је $AD' \parallel BC'$ тј. $AD \parallel BC'$ јер $D'\in AD$. Зато је C' сециште праве AC и праве кроз B паралелне са AD.





Тачка $F = BE \wedge CD = s \wedge CD$ је на оси па $F \in C'D'$ јер су по леми 1,51 праве CD, $C'D'$ и оса s конкурентне, а одавде је $D' = AD \wedge C'F$ (јер $D' \in AD$ и $D' \in C'F$ због $F \in C'D'$), чиме смо одредили слику $f(ABCD)$.

- Ако је тачка E центар, онда је оса $s = AB$. Означимо $U = AD \wedge BC$. Како је у трапезу $ABC'D'$: $AD' \parallel BC'$ то је $f(U) = U' = AD' \wedge BC'$ бесконачна тачка и зато тачка U припада противоси u. Циљ нам је да добијемо слике C' и D' тачака C и D да бисмо одредили слику четвороугла $ABCD$ при хомологији f.



По Леми 1.51 $C' \in EC$, $D' \in ED$ и $U' \in EU$ па је U' бесконачна тачка праве EU. Зато је $EU \parallel AD' \parallel BC'$ тј. C' је сечиште праве EC и праве кроз B паралелне EU, док је D' сечиште праве ED и праве кроз A паралелне EU, што је и требало да покажемо.