1.13. Пројективна колинеација

Пројективитети представљају пројективна пресликавања једнодимензионих објеката (домени и кодомени су низови тачака или праменови правих).

<u>Деф</u> <u>Колинеација</u> је аутоморфизам пројективне равни који чува релацију инциденције.

Тачније, под колинеацијом пројективне равни $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ подразумевамо бијективна пресликавања $f_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ и $f_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ која чувају инциденцију, у смислу да ако је $A \,\mathcal{I}\, p$ за неко $A \in \mathcal{T}$ и $p \in \mathcal{P}$ онда је и $f_{\mathcal{T}}(A) \,\mathcal{I}\, f_{\mathcal{P}}(p)$. Одавде следи $f_{\mathcal{P}}(A \vee B) = f_{\mathcal{T}}(A) \vee f_{\mathcal{T}}(B)$ за различите тачке $A, B \in \mathcal{T}$, тј. $f_{\mathcal{T}}(p \wedge q) = f_{\mathcal{P}}(p) \wedge f_{\mathcal{P}}(q)$ за различите праве p и $q \in \mathcal{P}$ тј. $f_{\mathcal{T}}$ индукује $f_{\mathcal{P}}$ и обрнуто и зато их обележавамо истим словом f.

Колинеација пресликава колинеарне тачке у колинеарне тачке, а конкурентне праве у конкурентне праве.

$f(X) = X$ за неко $X \in T$ онда је X фиксна тачка

$f(x) = x$ за неко $x \in P$ онда је x фиксна права

Тривијални пример колинеације је идентичко пресликавање Id.

Ако су све тачке инцидентне са неком правом фиксне онда је та права тачка по тачка фиксна права.

Уколико неидентичка колинеација има тачку за коју важи да је свака права која је са њом инцидентна фиксна, онда се та тачка зове центар колинеације. Уколико неидентичка колинеација има тачка по тачка фиксну праву онда се она зове оса колинеације.

Теорема 1.50 Неидентичка колинеација има осу ако и само ако има центар.

Посебан тип неидентичке колинеације која има осу (а по претходној теореми и центар) зовемо **перспективна колинеација** (или **централна колинеација**)

Лема 1.51. За перспективну колинеацију важи:

Произвољна тачка, њена слика и центар су колинеарне тачке.

Произвољна права, њена слика и оса су конкурентне праве.

Лема 1.52 Перспективна колинеација једнозначно је одређена осом, центром и паром одговарајућих тачака.

S - центар перспективне колинеације   s - оса перспективне колинеације

Деф **Елација** је перспективна колинеација код које је центар инцидентан оси. $S \, I \, s$

Хомологија је перспективна колинеација код које центар није инцидентан оси. $S \not{I} \, s$

Пројективна колинеација је колинеација f таква да је за сваку праву p, рестрикција $f\restriction_p : (p) \to (f(p))$ пројективитет

Лема 1.54 Ако је рестрикција колинеације f пројективне равни на неку праву пројективитет, онда је f пројективна колинеација.

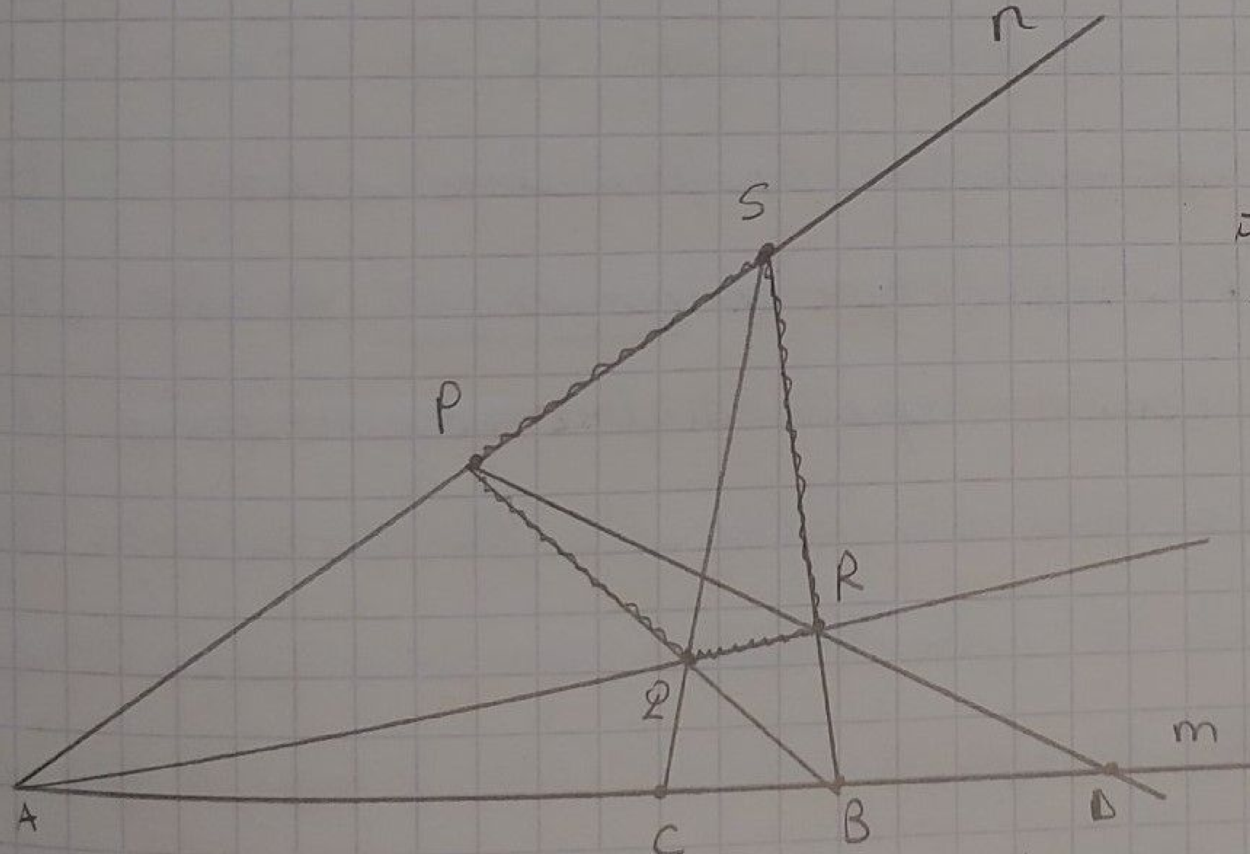
Како свака перспективна колинеација f има осу s, а рестрикција $f\restriction_s = Id$ је пројективитет, то је она пројективна колинеација.

Теорема 1.56 (Основна теорема колинеације) Постоји јединствена пројективна колинеација Папосове равни која темена четворотеменика $ABCD$ слика редом у темена четворотеменика $A'B'C'D'$.

1.14. Хармонијска четворка

Нека је $PQRS$ четворотеменик. Постоји три пара несуседних страница и њихова сецишта зовемо <u>дијагоналне тачке</u>: $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$, $(P \vee R) \wedge (Q \vee S)$ и $(P \vee S) \wedge (Q \vee R)$.

Нека су A, B, C различите тачке праве m у Папосовој (или бар Дезарговој равни) и n права кроз A различита од m и нека су P и S тачке праве n тако да су A, P и S различите. Дефинишемо $Q = (P \vee B) \wedge (S \vee C)$, $R = (Q \vee A) \wedge (S \vee B)$ и $D = (A \vee B) \wedge (P \vee R)$.



$A \neq B$ јер су дијагоналне тачке четворотеменика различите

C и D леже на страницама четворотеменика на којима нису A и B, одакле је $A \neq C \neq B$ и $A \neq D \neq B$.

Ако тачке A, B, C, D при $\mathcal{H}(AB; CD)$ нису различите, мора бити $C = D$ а то се дешава акко су дијагоналне тачке четворотеменика $PQRS$ колинеарне

Деф За уређену четворку колинеарних тачака (A, B, C, D) кажемо да је **хармонијска четворка** и пишемо $\mathcal{H}(AB;CD)$ ако постоји четворотеменик $PQRS$ тако да су A и B дијагоналне тачке, док C и D леже на несуседним страницама које образују трећу дијагоналну тачку

Аксиома 1.5 (**Фаноова аксиома**) Дијагоналне тачке сваког четворотеменика су неколинеарне.

Ако су дијагоналне тачке четворотеменика неколинеарне кажемо да је он **Фаноов**, док је у супротном **анти-Фаноов.**

Лема 1.57. $\mathcal{H}(AB;CD) \iff \mathcal{H}(BA;CD) \iff \mathcal{H}(BA;DC) \iff \mathcal{H}(AB;DC)$

Лема 1.58 $\mathcal{H}(AB;CD) \iff \mathcal{H}(CD;AB)$

1.15. Колинеација реалне пројективне равни

Реална пројективна раван $(T_{\mathbb{R}}, P_{\mathbb{R}}, I_{\mathbb{R}})$ се природно поистовећује са интуитивном равни $(T_\infty, P_\infty, I_\infty)$ при чему је $u_\infty = [0:0:1]$ бесконачна права.

Нека је f колинеација интуитивне пројективне равни.

Противоса је права $f^{-1}(u_\infty)$, док је **хоризонт** права $f(u_\infty)$.

Нека је s оса, а S центар перспективне колинеације f интуитивне пројективне равни. Нека је u противоса тј. $f(u) = u_\infty$. Ако су оса и противоса различите праве онда оне имају сецигте $A = s \wedge u$, али $f(A) = A$ јер $A \in s$ а s је оса перспективне колинеације па су све њене тачке фиксне и важи $f(A) \in u_\infty$ јер $A \in u$ и $f(u) = u_\infty$. Зато $A = f(A) \in u_\infty$ што значи да се праве u и s секу у бесконачној тачки односно да су оне паралелне.

Инверзно пресликавање је f^{-1} и противоса му је $(f^{-1})^{-1}(u_\infty)$ $= f(u_\infty)$ што је хоризонт пресликавања f, па је зато и хоризонт права паралелна са осом и противосом.

Тиме смо доказали следећу лему:

Лема 1.70 Оса, противоса и хоризонт су паралелне праве.

Афино пресликавање је трансформација афиног простора која чува тачке и праве, тј. колинеација која коначне елементе шаље у коначне, а бесконачне у бесконачне, што значи да афино пресликавање има u_∞ за фиксну праву, тј. противоса је $u = f^{-1}(u_\infty) = u_\infty$.

Перспективне колинеације за фиксне праве имају само осу и праве које пролазе кроз центар тако да се лако класификују афине перспективне колинеације за које је $u = u_\infty$.

Хомологија ($S \notin s$) за коју важи $s = u$ је <u>хомотетија</u>, а хомологија код које $S \in u_\infty$ је перспективна <u>афиност</u>.

Елација ($S \in s$) код које је $s = u$ је <u>транслација</u>, а она код које је $S \in u_\infty \neq s$ је <u>трансвекција</u> (смицање)

3.13. Доказати да је перспективна колинеација одређена

1) центром, осом и паром одговарајућих тачака;
2) центром, осом и паром одговарајућих правих;
3) центром, осом и противосом.

$B \, I \, s \Rightarrow B' = B$

$B \not I \, s \Rightarrow AB \neq s$

$B \not I \, SA \Rightarrow S \not I \, AB$

$X = AB \wedge A'B' \, I \, s$

није оса и није фиксна права јер не садржи центар S

(*) 1) Нека тачке A и $A' = f(A)$ буду одговарајући пар тачака перспективне колинеације f. По Леми 1.51 тачке A, A' и S су колинеарне. Треба одредити слику B' произвољне тачке B и поступићемо као у Леми 1.52. По Леми 1.51. тачке B, B' и S су колинеарне, а праве AB, $f(AB) = f(A) \vee f(B) = A'B'$ и s су конкурентне одакле $B' \in SB$ (узимамо $B \neq S$, $B \neq A$).

У случају $B \notin SA$ конструишемо $X = AB \wedge s$, а онда $B' = A'X \wedge SB$.

Након тога можемо скицирати неко B и за тачке $C \in SA$ је $C' = B'Y \wedge SC$ где је $Y = BC \wedge \Delta$. $\Rightarrow C \notin SB$ јер $B \notin SA$ по уроту тачки A и B из претходног случаја имају тачке B и C.

Тиме смо одредили слику произвољне тачке при овој перспективној колинеацији.

2) Нека праве p и p' чине одговарајуће праве при перспективној колинеацији f, онда у поставци задатка праве p, p' и Δ морају бити конкурентне. За произвољну праву $q \ni S$ можемо добити одговарајући пар тачака $A = p \wedge q$ и $A' = p' \wedge q' = p' \wedge q$ па се решење своди на случај 1).

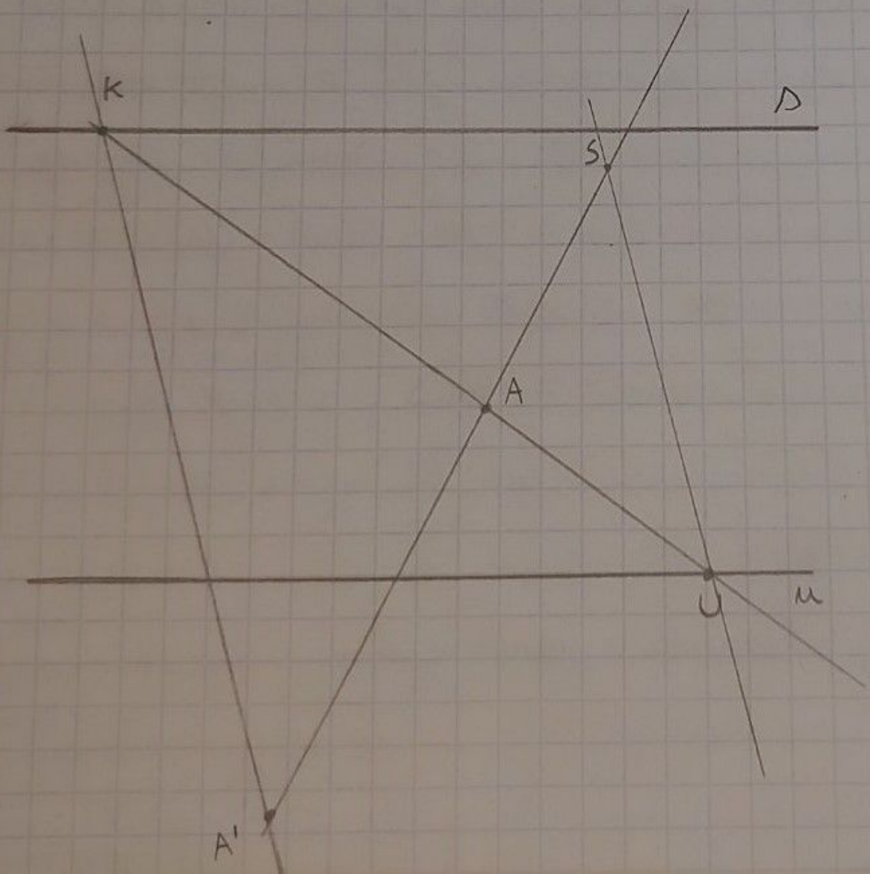
3) Ако је u противоса, онда у поставци задатка праве Δ и u морају бити паралелне на основу леме 1.70

Нека је $p \not\ni S$ произвољна права и нека је $P = p \wedge u$ и $X = p \wedge \Delta$. Како $P \in u = f^{-1}(u_\infty)$ то $f(P) = P' \in u_\infty$ па је P'

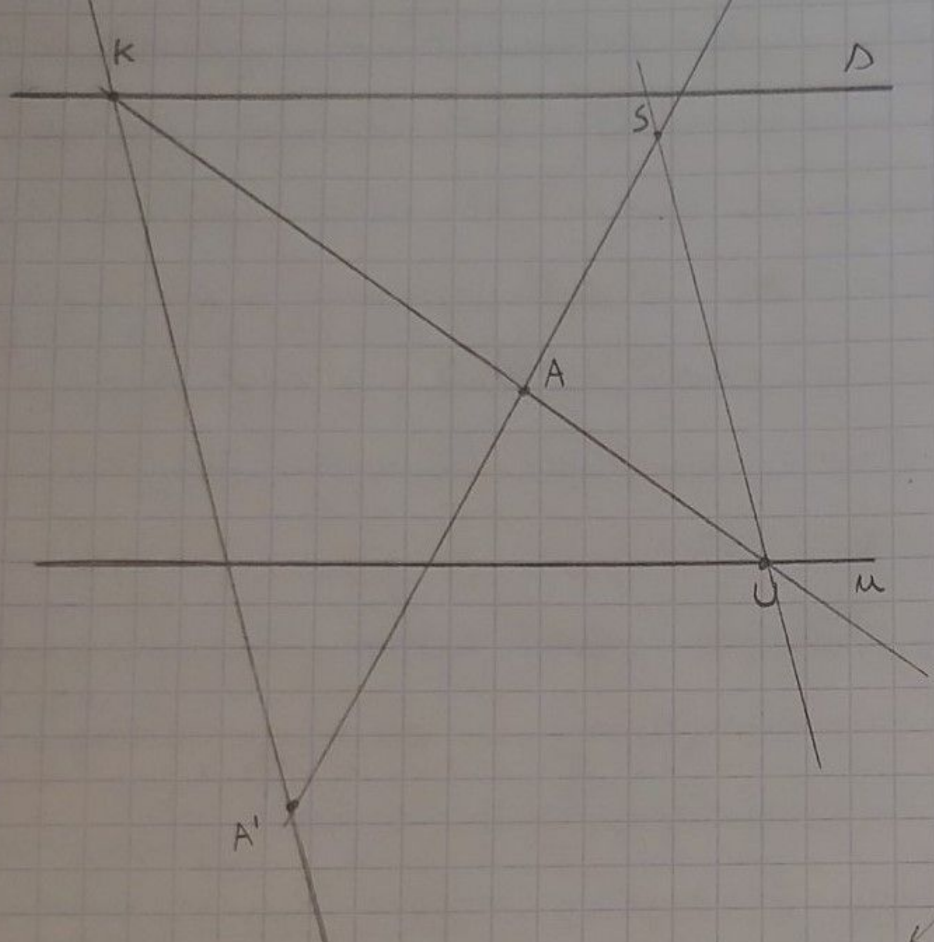
бесконачна тачка, а како су праве p, p' и s конкурентне, одакле $X \in p'$ па је p' права кроз тачку X паралелна са $\overrightarrow{PS}$.
$P' \in p'$ па је p' паралелна са PS
Онда имамо пар одговарајућих правих p и p' при перспективној колинеацији f па решење наставимо као у случају г).

3.14. Дате су тачке A, A', S и права u. Конструисати све перспективне колинеације са центром S и противосом u која слика A у A'.

(*) По Леми 1.51. тачке A, A', S морају бити колинеарне иначе поменута перспективна колинеација f не постоји.



ако би $U \in SA$ онда би $A'U'$ била права AU (јер би тачке A, A', S, U, U' биле колинеарне) па



ако би $U \in SA$ онда би $A'U'$ била права AU (јер би тачке A, A', S, U, U' биле колинеарне) па не бисмо могли да конструишемо тачку $K = AU \wedge A'U'$

Нека је $U \in и$ произвољна тачка ван праве SA.

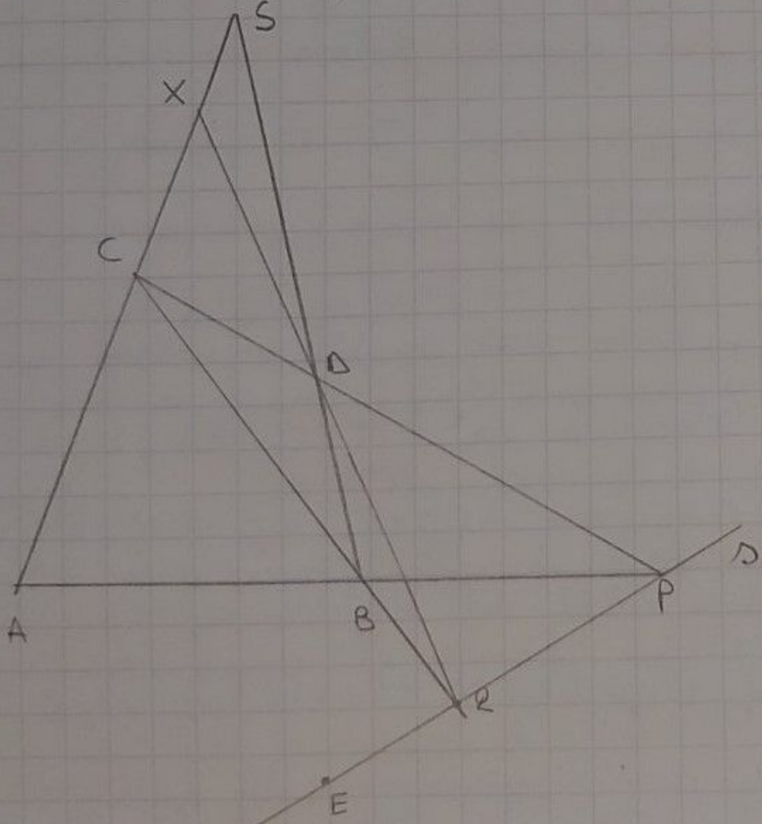
$U \in и = f^{-1}(и_\infty) \Rightarrow U' = f(U) \in и_\infty$ тј. U' је бесконачно далека тачка и по Леми 1.51 U, U' и S су колинеарне па је $U' = и_\infty \wedge SU$ тј. U' је бесконачна тачка праве SU.

По Леми 1.51 права AU, њена слика $A'U'$ (права кроз A' паралелна са SU) и оса Δ су конкурентне праве па је тачка $K = AU \wedge A'U'$ на оси Δ.

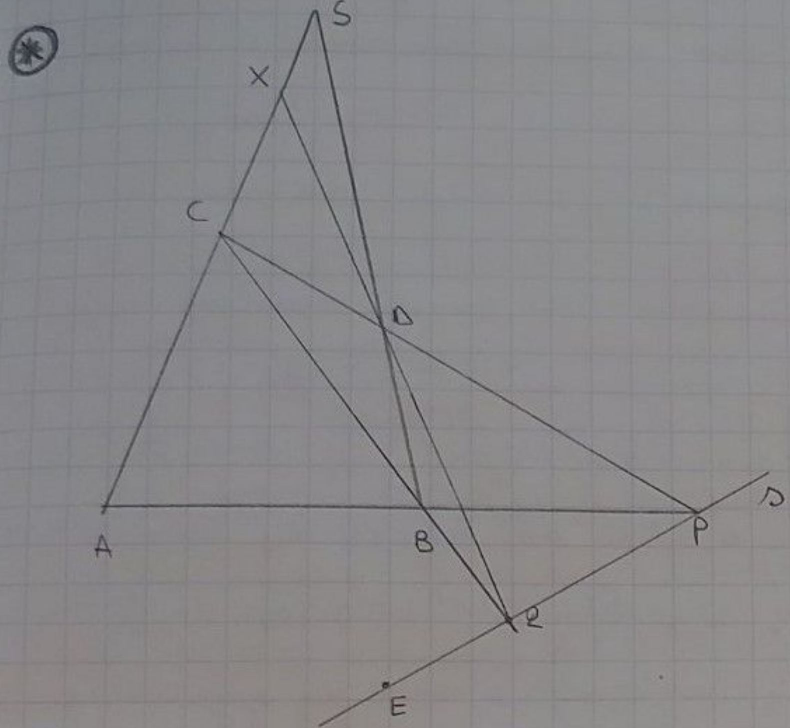
По Леми 1.70 оса је паралелна противоси па је $K \in \Delta \parallel и$.

Дакле, конструкција тражене осе перспективне колинеације се врши на следећи начин: изаберемо произвољну тачку $U \in u$ такву да $U \notin SA$, а затим конструишемо тачку K као сециште праве AU и праве кроз A' паралелне са SU. Сада s је права кроз K паралелна са u.

3.15. Дате су тачке A, B, C, D, E међу којима нема три колинеарне, нити било која два пара чине паралелне странице. Ако за перспективну колинеацију f важи $f(A)=C$, $f(B)=D$ и $f(E)=E$, конструисати $f(C)$.

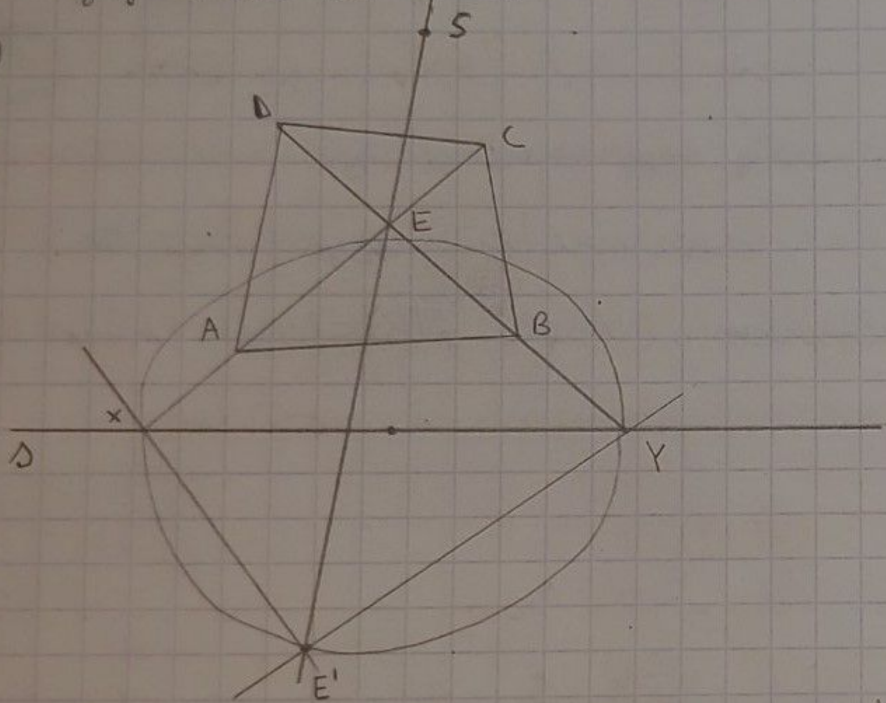


⊛



Како је $f(A)=C$ и $f(B)=D$ то су по Леми 1.51 тачке A, C, S колинеарне, као и тачке B, D, S па центар мора бити $S = AC \wedge BD$. $S \neq E$ јер A, $C=f(A)$ и E нису колинеарне и због $f(E)=E$ тачка E је фиксна тачка па мора припадати оси. Праве AB, $f(AB)=CD$, s су конкурентне, те $P = AB \wedge CD$ припада оси и зато је оса $s = E \vee P$. Сада је перспективна колинеација f на основу задатка 3.13. одређена осом s, центром S и паром одговарајућих тачака, нпр. A и $f(A)=C$. Ако је $X = f(C)$ онда су по Леми 1.51 тачке C, X и S колинеарне, а праве CB, XD, s конкурентне па ако је $Q = CB \wedge s$ онда $X = CS \wedge QD$.

3.16. Дата је тачка S, права s и четвороугао $ABCD$. Одредити перспективну колинеацију са осом s и центром S која дати четвороугао пресликава у четвороугао коме су дијагонале нормалне.



Прво посматрамо општи случај да бисмо боље видели основну идеју реализације правог угла у слици. Означимо са $E = AC \wedge BD$, $X = AC \wedge s$, $Y = BD \wedge s$. Како $E \in AC$ и $X \in AC$ то $AC \overset{\text{праве}}{=} XE$ тј. $A'C' = X'E' = XE'$ јер $X \in s$ и слично како $Y \in BD$ и $E \in BD$ то $BD = YE$ тј. $B'D' = Y'E' = YE'$ јер $Y \in s$. Како је по услову задатка $A'C' \perp B'D'$ (јер се дати јер $Y \in \Delta$. Како је по услову задатка $A'C' \perp B'D'$ (јер се дати четвороугао $ABCD$ пресликава у четвороугао коме су дијагонале нормалне) то је $XE' \perp YE'$ тј. $\measuredangle XE'Y = 90^\circ$ што значи да E' лежи на кругу под пречником XY у ознаци $k(XY)$. По Леми 1.51 тачке S, E и E' су колинеарне па $E' \in SE \cap k(XY)$.

Након избора $E' \in SE \cap k(XY)$ перспективна колинеација је једнозначно одређена осом Δ, центром S и паром тачака E и E'.

Пресек праве и круга може бити празан скуп, једна тачка или две тачке. У општем случају у питању су две тачке од којих свака дефинише перспективну колинеацију која задовољава услове задатка, па биремо једну од њих и тако ћемо урадити задатак.

Противоса је права паралелна са Δ по Леми 1.70 и приме-

тимо да оне садрже тачку T пресека праве AC и праве
кроз S паралелне са XE' јер је $f(T)$ бесконачно далека тачка
са бесконачне праве u_∞ која одговара паралелним правама
$f(AC) = A'C'$ и правом кроз S паралелном са XE' (која се
слика у себе јер пролази кроз центар S) и оне су заиста
паралелне јер смо већ доказали да је $A'C' = XE'$.

Уколико противоса u сече четвороугао $ABCD$ онда његова
слика $A'B'C'D'$ није четвороугао у правом смислу речи
(јер због $f(u) = u_\infty$ садржи и бесконачне тачке).

Размотримо неке специјалне случајеве.

У случају $S = E'$ како су по Леми 1.51 тачке A, A', S колинеарне, као и тачке B, B', S то је $\measuredangle ASB = \measuredangle A'SB' = \measuredangle A'E'B' = 90^\circ$

У општем случају који смо решили постоје тачке X и Y, тј. $AC \nparallel \Delta$ и $BD \nparallel \Delta$. Ако је $AC \parallel \Delta \parallel BD$ било би $A'C' \parallel \Delta \parallel B'D'$ што није могуће јер је четвороугао $A'B'C'D'$ са нормалним дијагоналама. У случају $AC \parallel \Delta$ и $BD \nparallel \Delta$ пресек X не постоји, али $AC \parallel \Delta$ повлачи $AC \parallel \Delta \parallel A'C'$ па из $A'C' \perp B'D'$ следи $B'D' \perp \Delta$.
За $Y = BD \cap \Delta$ имамо $Y = Y'$ јер $Y \in \Delta$ и $Y' = B'D' \cap \Delta$ тј. $Y \in B'D'$ па је B' сецишће праве SB и праве кроз Y нормалне на Δ. $\square$