1. Нека су A, B, C и D различите колинеарне тачке у $\mathbb{RP}^2$ такве да је $(ABCD) = d$. Испитати за које вредности реалног броја d међу пет дворазмера $(CDAB)$, $(BDAC)$, $(DCBA)$, $(BACD)$, $(BCAD)$ има најмањи број негативних.

Решење: На основу теореме о особинама дворазмере важи

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$$
$$(BACD) = (ABCD)^{-1} = (ABDC)$$
$$(ACBD) = 1 - (ABCD)$$

$$(CDAB) = (ABCD) = d$$

$$(BDAC) = (ACBD) = 1 - (ABCD) = 1 - d$$

$$(DCBA) = (BADC) = (ABCD) = d$$

$$(BACD) = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{d}$$ ($(ABCD) = d \neq 0$ јер дворазмера $(ABCD)$ не може бити нула)

$$(BCAD) = 1 - (BACD) = 1 - \frac{1}{(ABCD)} = 1 - \frac{1}{d}$$

Посматрајмо производ дворазмера $(CDAB)\cdot(BDAC)\cdot(DCBA)\cdot(BACD)\cdot(BCAD) =$

$$= d\cdot(1-d)\cdot\cancel{d}\cdot\frac{1}{\cancel{d}}\cdot\left(1-\frac{1}{d}\right) = (1-d)\cdot(d-1) =$$

$$= (1-d)\cdot(-1)\cdot(1-d) = -(1-d)^2 < 0$$

$(1-d)^2 \geq 0$

$d=(ABCD)$ не може бити 1,

те је $1-d \neq 0$

$\Downarrow$

$(1-d)^2 > 0 \quad / \cdot(-1) < 0$

$-(1-d)^2 < 0$

Како је производ пет реалних бројева мањи од 0, онда бар један од тих бројева мора бити негативан.

1) случај $d<0$

$1-d>0$

$1-\frac{1}{d}>0$

$\frac{1}{d}<0$

Од посматраних 5 дворазмера d, $1-d$, d, $\frac{1}{d}$, $1-\frac{1}{d}$

3 су негативне

$d \neq 0$ јер је $d=(ABCD)$, а дворазмера не може бити 0

2) $0<d<1$

$d>0$

$1-d>0$

$\frac{1}{d}>0$

$1-\frac{1}{d}=\frac{d-1}{d}<0$

Од посматраних 5 дворазмера d, $1-d$, d, $\frac{1}{d}$, $1-\frac{1}{d}$ тачно једна је негативна и то је $1-\frac{1}{d}$.

$d \neq 1$ јер је $d=(ABCD)$, а дворазмера не може бити 1

3) $d>1$

$d>0$

$1-d<0$

$\frac{1}{d}>0$

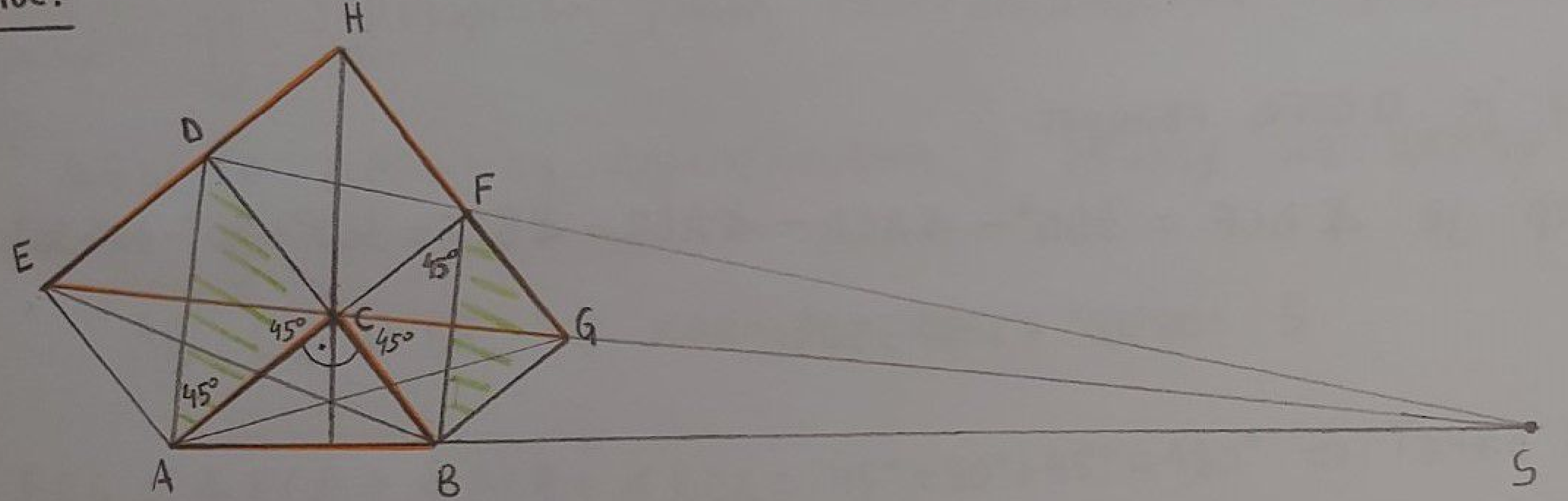
$1-\frac{1}{d}=\frac{d-1}{d}>0$

Од посматраних 5 дворазмера d, $1-d$, d, $\frac{1}{d}$, $1-\frac{1}{d}$ тачно једна је негативна и то је $1-d$.

Најмањи број негативних дворазмера међу посматраних 5 дворазмера $(CDAB)$, $(BDAC)$, $(DCBA)$, $(BACD)$, $(BCAD)$ је 1 и он се постиже када је реални параметар $d \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

(2.) У Дезарговој равни дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена C и квадрати ACDE и BCFG над страницама AC и BC. Ако је тачка H пресек правих DE и FG, доказати да су праве AG, BE и CH конкурентне.

Решење:



Посматрамо троуглове BGF и ACD.

BG ⊥ BC јер је □BCFG квадрат

AC ⊥ BC јер је △ABC правоугли троугао са правим углом код темена C

⇓

BG ∥ AC

$\measuredangle ACF = \measuredangle ACB + \measuredangle BCF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ Тачке A, C и F су колинеарне.

$\measuredangle BFC = 45^\circ$ као угао између дијагонале BF и странице CF квадрата BCFG

$\measuredangle CDA = 45^\circ$ као угао између дијагонале AD и странице AC квадрата ACDE

$$\Downarrow$$

$$BF \parallel AD$$

$GF \perp CF$ јер је $\square BCFG$ квадрат

$CD \perp CF$ јер је $\measuredangle DCF = 360^\circ - \measuredangle ACD - \measuredangle ACB - \measuredangle BCF = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ =$

$$= 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

$\Downarrow$

$GF \parallel CD$

$\Rightarrow$ Како је $BG \parallel AC$, $BF \parallel AD$ и $GF \parallel CD$ у еуклидској равни, онда се одговарајуће спојнице BG и AC; BF и AD; GF и CD у придруженој пројективној равни секу у бесконачним тачкама које су колинеарне јер све припадају бесконачној правој.

$\triangle BGF$ и $\triangle ACD$

$BG \wedge AC$, $BF \wedge AD$ и $GF \wedge CD$ су колинеарне тачке

$\Downarrow$

$\triangle BGF$ и $\triangle ACD$ су перспективни у односу на осу

$\Downarrow$ У Дезарговој равни смемо применити Обрнуто Дезаргово тврђење:

$\triangle BGF$ и $\triangle ACD$ су перспективни у односу на центар

$\Downarrow$

AB, CG и DF су конкурентне у тачки S

$\measuredangle ECG = \measuredangle ECA + \measuredangle ACB + \measuredangle BCG = 45° + 90° + 45° = 180° \Rightarrow$ Тачке E, C и G су колинеарне.

Посматрамо троуглове $\triangle ABC$ и $\triangle GEH$.

$AB \wedge GE = S$ јер $AB \wedge CG = S$ и тачке E, C и G су колинеарне

$AC \wedge GH = F$ јер су тачке A, C и F колинеарне (доказано раније) и $H \mathcal{I} FG$ по услову задатка, па $F \mathcal{I} GH$

$BC \wedge EH = D$ јер је $H \mathcal{I} DE$ по услову задатка, па $D \mathcal{I} EH$, а тачке B, C и D су колинеарне јер је $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA + \measuredangle ACD = 90° + 90° = 180°$.

S, F и D су колинеарне тачке јер је $S \, I \, DF$

$\Downarrow$

$\triangle ABC$ и $\triangle GEH$ су перспективни у односу на осу

$\Downarrow$ обрнуто Дезаргово тврђење

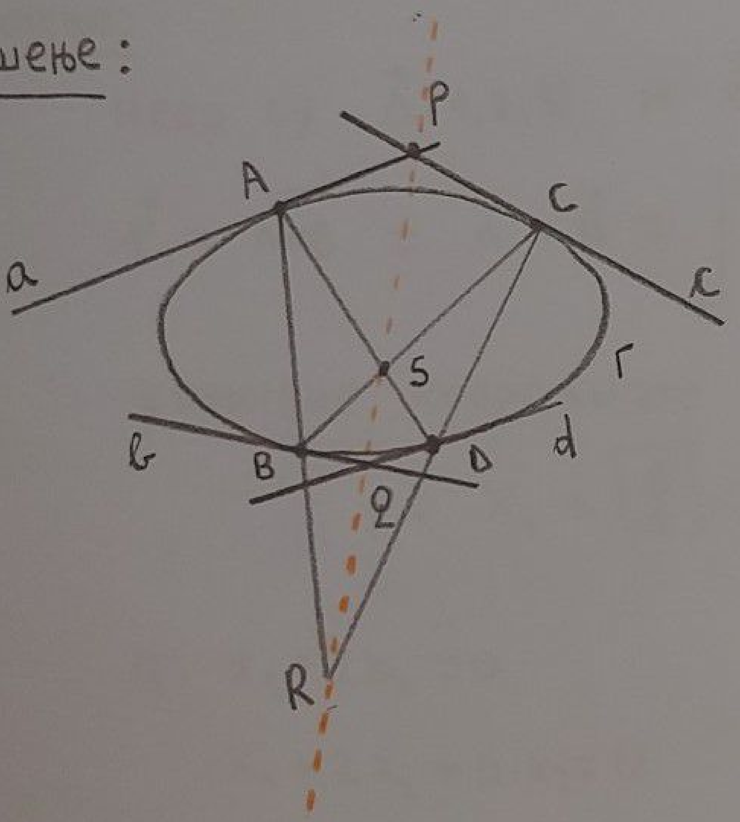
$\triangle ABC$ и $\triangle GEH$ су перспективни у односу на центар

$\Downarrow$

AG, BE и CH су конкурентне праве, што се и тражило.

3. У Папосовој равни дате су различите тачке A, B, C и D недегенерисане конике Γ. Нека је P сециште тангенти на Γ у тачкама A и C, а Q сециште тангенти на Γ у тачкама B и D. Ако је R сециште правих AB и CD, а S сециште правих AD и BC, доказати да су тачке P, Q, R и S колинеарне.

Решење:



Означимо са a, b, c, d тангенте на конику Γ у тачкама A, B, C, D, редом.

$P = a \wedge c$ $\quad Q = b \wedge d$ $\quad R = AB \wedge CD$ $\quad S = AD \wedge BC$

У Папосовој равни смемо да примењујемо Паскалову теорему на недегенерисану конику Γ. Посматрамо гранични четворотеменик $AABCCD$. Применом Паскалове теореме добијамо да су колинеарне тачке $a \wedge c = P$, $AB \wedge CD = R$ и $BC \wedge DA = S$, односно $P \,\mathrm{I}\, R \vee S$.

Посматрамо гранични четвортеменик $ABBCDD$.

Применом Паскалове теореме добијамо да су колинеарне тачке

$AB \wedge CD = R$, $b \wedge d = Q$ и $BC \wedge DA = S$, односно $Q \,\mathrm{I}\, R \vee S$.

Како $P \,\mathrm{I}\, R \vee S$ и $Q \,\mathrm{I}\, R \vee S$, онда су тачке P, Q, R и S колинеарне,

што се и тражило.

4. У $\mathbb{RP}^2$ дате су тачке $A(1:2:3)$ и $B(0:2:1)$ својим хомогеним координатама. Одредити једначину спојнице $p = A \vee B$. Ако је права q дата једначином $x_1 + 2x_2 = 0$, одредити хомогене координате пресека $C = p \wedge q$. Одредити координате тачке D за коју је $\mathcal{H}(AB;CD)$. Попуни празна поља: $p: x_1 + \square x_2 + \square x_3 = 0$, $C(\square : 1 : \square)$, $D(5 : \square : \square)$.

Решење:

Нека су $\vec{A}(1,2,3)$ и $\vec{B}(0,2,1)$ вектори представници тачака A и B.

$$\vec{p} = \overrightarrow{A \vee B} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-4,-1,2)$$

Хомогене координате праве p су $[-4:-1:2]$, односно $[1 : \frac{1}{4} : -\frac{1}{2}]$.

$$p: x_1 + \boxed{\frac{1}{4}} x_2 + \boxed{-\frac{1}{2}} x_3 = 0.$$ Узмимо $(-4,-1,2)$ за вектор представник $\vec{p}$.

$q: x_1 + 2x_2 = 0$

$x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$

Хомогене координате праве q су $[1:2:0]$, а за вектор представник $\vec{q}$ можемо узети $(1,2,0)$.

$$\vec{c} = \overrightarrow{p \wedge q} = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-4, 2, -7)$$

Хомогене координате тачке C су $(-4:2:-7)$, односно $(-2:1:-\frac{7}{2})$.

$$C\left(\boxed{-2} : 1 : \boxed{-\tfrac{7}{2}}\right)$$

$$\mathcal{H}(AB;CD) \Rightarrow (ABCD) = -1$$

$$\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}$$

$$(-4, 2, -7) = \alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (0,2,1)$$

$$(-4, 2, -7) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (0, 2\beta, \beta)$$

$$(-4, 2, -7) = (\alpha, 2\alpha + 2\beta, 3\alpha + \beta)$$

$$\boxed{\alpha = -4}$$

$$2\alpha + 2\beta = 2 \qquad 2 \cdot (-4) + 2\beta = 2 \Rightarrow -8 + 2\beta = 2$$

$$2\beta = 2 + 8$$

$$2\beta = 10$$

$$\boxed{\beta = 5}$$

$$3\alpha + \beta = -7$$

$$3 \cdot (-4) + 5 = -7$$

$$-12 + 5 = -7$$

$$-7 = -7 \quad T$$

$$\Rightarrow \vec{C} = -4 \cdot \vec{A} + 5 \cdot \vec{B}$$

$$\vec{D} = \gamma\cdot\vec{A} + \delta\cdot\vec{B}$$

$$-1 = (ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = \frac{5}{-4} : \frac{\delta}{\gamma} = -\frac{5}{4}\cdot\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\gamma}{\delta} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}\vec{D} &= 4\cdot\vec{A} + 5\cdot\vec{B}\\ &= 4\cdot(1,2,3) + 5\cdot(0,2,1)\\ &= (4,8,12) + (0,10,5)\\ &= (4,18,17)\end{aligned}$$

Хомогене координате тачке D су $(4:18:17)$, односно $\left(5:\frac{45}{2}:\frac{85}{4}\right)$.

$\cdot\frac{5}{4}$

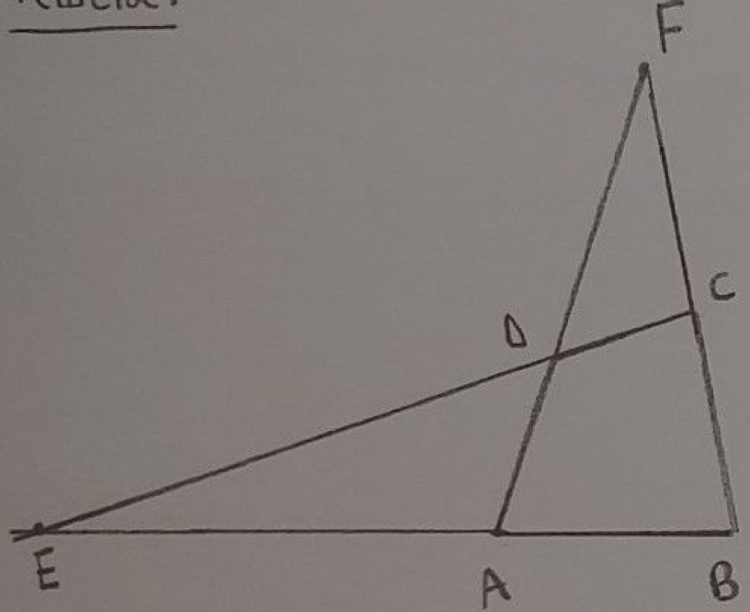
$$D\left(5:\boxed{\frac{45}{2}}:\boxed{\frac{85}{4}}\right)$$

$$18\cdot\frac{5}{4} = \frac{18\cdot5}{4} = \frac{9\cdot5}{2} = \frac{45}{2}$$

$$17\cdot\frac{5}{4} = \frac{17\cdot5}{4} = \frac{85}{4}$$

5. У Папосовој равни дат је четворотеменик $ABCD$ и тачка P инцидентна страници $A\vee B$. Ако је пројективитет $f=(A\vee B)\overset{C}{\doublebarwedge}(D\vee A)\overset{B}{\doublebarwedge}(C\vee D)\overset{A}{\doublebarwedge}(B\vee C)\overset{D}{\doublebarwedge}(A\vee B)$ добијен применом четири перспективитета, доказати да је $f(f(f(P)))=P$.

Решење:



Означимо одговарајуће перспективитете

$f_C:(A\vee B)\to(D\vee A)$ дат је са $(A\vee B)\overset{C}{\doublebarwedge}(D\vee A)$

$f_B:(D\vee A)\to(C\vee D)$ дат је са $(D\vee A)\overset{B}{\doublebarwedge}(C\vee D)$

$f_A:(C\vee D)\to(B\vee C)$ дат је са $(C\vee D)\overset{A}{\doublebarwedge}(B\vee C)$

$f_D:(B\vee C)\to(A\vee B)$ дат је са $(B\vee C)\overset{D}{\doublebarwedge}(A\vee B)$

$$f=f_D\circ f_A\circ f_B\circ f_C$$

$$E\xmapsto{f_C} EC\wedge DA=D\xmapsto{f_B} DB\wedge CD=D\xmapsto{f_A} DA\wedge BC=F\xmapsto{f_D} FD\wedge AB=A\Rightarrow E\xmapsto{f} A$$

$$A\xmapsto{f_C} AC\wedge DA=A\xmapsto{f_B} AB\wedge CD=E\xmapsto{f_A} AE\wedge BC=B\xmapsto{f_D} BD\wedge AB=B\Rightarrow A\xmapsto{f} B$$

$$B\xmapsto{f_C} BC\wedge DA=F\xmapsto{f_B} FB\wedge CD=C\xmapsto{f_A} CA\wedge BC=C\xmapsto{f_D} CD\wedge AB=E\Rightarrow B\xmapsto{f} E$$

$$f:\begin{pmatrix}E & A & B\\ A & B & E\end{pmatrix}\qquad f^2:\begin{pmatrix}E & A & B\\ B & E & A\end{pmatrix}\qquad f^3:\begin{pmatrix}E & A & B\\ E & A & B\end{pmatrix}$$

На основу Основног тврђења пројективитета, постоји јединствени пројективитет који различите 3 колинеарне тачке пресликава редом у различите 3 колинеарне тачке.

Како f^3 слика 3 различите колинеарне тачке E, A, B у 3 различите тачке E, A, B, то f^3 мора бити идентичко пресликавање, те је $f^3(P) = f(f(f(P))) = P$, где је P тачка инцидентна страници AvB.