**4.11.** Нека је $f$ пројективитет реалне пројективне праве $p$ на себе саму и $A_0 \in p$. Уколико важи $A_{n+1} = f(A_n)$ за $n \geq 0$ и $A_6 = A_0$ одредити дворазмеру $(A_1 A_2 A_4 A_5)$ уколико постоји.

(*) Ако постоји дворазмера $(A_1A_2A_4A_5)$ онда због инваријантности пројективитета постоје и дворазмере $(A_2A_3A_5A_6)$, $(A_3A_4A_6A_1)$, $(A_4A_5A_1A_2)$, $(A_5A_6A_2A_3)$, $(A_6A_1A_3A_4)$, $(A_0A_1A_3A_4)$ па су тачке $A_0, A_1, A_2$ и $A_3$ различите.

На правој $p$ уводимо хомогене координате са $A_0=(1:0)$, $A_1=(0:1)$, $A_2=(1:1)$, док је $A_3=(a:1)$ за неко $a \notin \{0,1\}$.

Пројективитет је индукован регуларном линеарном трансформацијом одакле је $\lambda \overrightarrow{A_{n+1}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \overrightarrow{A_n}$.

За $n=0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad m_{11}=0$$

За $n=1$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_2 = m_{12} \\ \lambda_2 = m_{22} \\ m_{22} = m_{12} \end{matrix}$$

За $n=2$

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_3 a = m_{12} \\ \lambda_3 = m_{21}+m_{22} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad a(m_{21}+m_{12}) = m_{12}$$

$$a \cdot (m_{21}+m_{12}) = m_{12}$$

$$a \cdot m_{21} = (1-a)\, m_{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{21} = (1-a)\lambda \\ m_{12} = a\lambda \end{cases}$$

Матрица пројективитета $f$ је $M \sim \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$

$$a\cdot(m_{21}+m_{12}) = m_{12}$$

$$a\cdot m_{21} = (1-a)\,m_{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{21} = (1-a)\lambda \\ m_{12} = a\lambda \end{cases}$$

Матрица пројективитета $f$ је $M \sim \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$

$$\vec{A_4} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a(2-a) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix}$$

$$\vec{A_5} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1-a+a(2-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A_6} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1+a-a^2) \\ (1-a)(2a-a^2)+a(1+a-a^2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a(1+a-a^2) \\ 2a-\cancel{a^2}-2a^2+\cancel{a^3}+a+\cancel{a^2}-\cancel{a^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1+a-a^2) \\ 3a-2a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1+a-a^2) \\ a(3-2a) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+a-a^2 \\ 3-2a \end{pmatrix}$$

$$A_6 = A_0 = (1:0) \Rightarrow 3-2a = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow M \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_3 = (3:2) \qquad \vec{A_3} = 3\vec{A_0} + 2\vec{A_1}$

$A_4 = (2:1) \qquad \vec{A_4} = 2\vec{A_0} + \vec{A_1}$

$$(A_1A_2A_4A_5) \underset{\xleftarrow{f}}{=} (A_0A_1A_3A_4) = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{4}{3}.$$

**4.15.** Ако је $(ABCD)=2$, $(ABCE)=3$, $(ADEF)=-2$, а $f$ пројективитет за који је $f(A)=D$, $f(B)=E$, $f(C)=F$, $f(D)=G$, израчунати $(ABCG)$.

⊛ Како резултат не зависи од избора хомогеног система координата то можемо узети $A(1:0)$, $B(0:1)$, $C(1:1)$.
Тачка $X$ има координате $((ABCX):1)$ то је $D(2:1)$ и $E(3:1)$ јер је дато $(ABCD)=2$ и $(ABCE)=3$.

$(ABCX)=\frac{1}{1}:\frac{1}{(ABCX)}$

$\vec{E}=\vec{A}+\vec{D}$ и $(ADEF)=-2$ то је $-2=(ADEF)=\frac{1}{1}:\frac{\beta}{\alpha}$ где $\vec{F}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{D}$ и $\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\vec{F}\sim 2\vec{A}-\vec{D}$ односно $F(0:1)=B$. Из $f(A)=D$, $f(B)=E$, $f(C)=F$ можемо добити матрицу пројективитета

$$\lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$(1,0)\mapsto(2,1)$ јер $f(A)=D$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2\lambda_1 = m_{11} \\ \lambda_1 = m_{21} \end{matrix} \Rightarrow m_{11} = 2m_{21}$$

$(0,1) \mapsto (3,1)$ jer $f(B) = E$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3\lambda_2 = m_{12} \\ \lambda_2 = m_{22} \end{matrix} \Rightarrow m_{12} = 3m_{22}$$

$(1,1) \mapsto (0,1)$ jer $f(C) = F$

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = m_{11} + m_{12} \\ \lambda_3 = m_{21} + m_{22} \end{matrix} \Rightarrow m_{12} = -m_{11}$$

све преко $m_{21}$

$m_{11} = 2m_{21}$

$m_{12} = -m_{11} = -2m_{21}$

$m_{22} = \frac{1}{3} m_{12} = -\frac{2}{3} m_{21}$

$$M \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{G} = M\vec{D} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

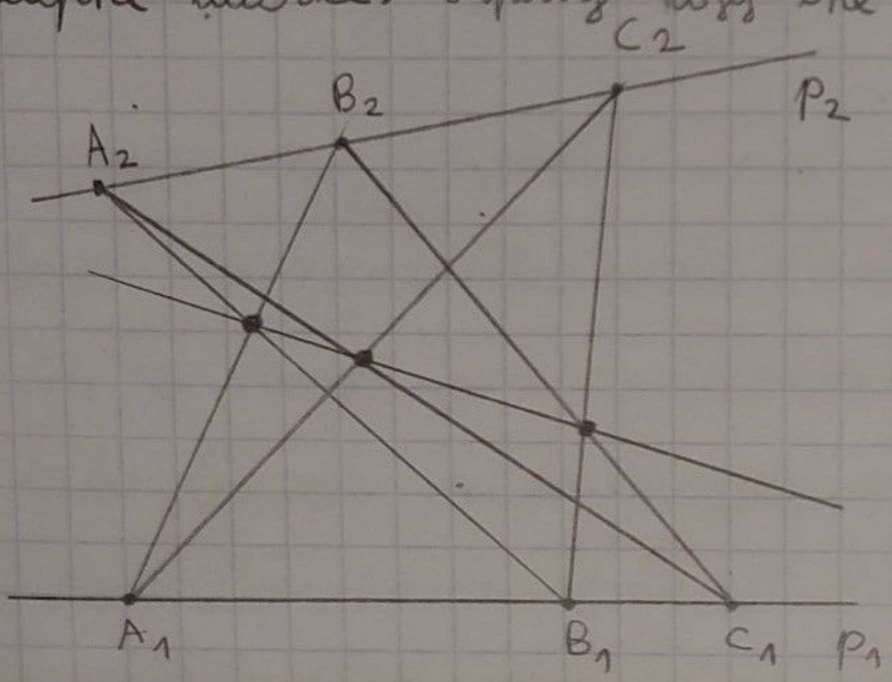
$\vec{G} = (6, 4)$

$G = (\frac{3}{2} : 1)$ $\quad \vec{G} = \frac{3}{2}\vec{A} + \vec{B}$

$$\Rightarrow (ABCG) = \frac{1}{1} : \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

## 1.11. Папосово тврђење

**Папосово тврђење (Тврђење 1.34)** Нека су $p_1$ и $p_2$ различите праве и нека су $A_1, B_1, C_1$ различите тачке инцидентне са $p_1$, а $A_2, B_2, C_2$ различите тачке инцидентне са $p_2$, тако да се све тачке разликују од $p_1 \wedge p_2$. Тада су сецишта $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке. Праву коју оне одређују називамо Папосова права.




Конфигурација Папосовог тврђења се састоји од 9 тачака и 9 правих

**Деф** Папосова раван је пројективна раван у којој важи Папосово тврђење.

**Тврђење о перспективитету (Тврђење 1.37)** Пројективитет између два низа тачака је перспективитет ако и само ако фиксира заједнички елемент (тј. сецишите тих низова тачака).

**Основно тврђење пројективитета (Тврђење 1.39)** Постоји јединствен пројективитет који различите колинеарне тачке $A_1, B_1, C_1$ пресликава редом у различите колинеарне тачке $A_2, B_2, C_2$.

**Теорема 1.40** Папосово тврђење, Тврђење о перспективитету и Основно тврђење пројективитета су еквивалентна у пројективној равни.

**Аксиома 1.4.** (Папосова теорема) Важи Папосово тврђење.

Ако за аксиому узмемо Основно тврђење пројективитета, уз много мање муке можемо извести Папосово тврђење и поново имати целу теорију на располагању.

**Теорема 1.36.** (Хесенбергова теорема) Папосова раван је Дезаргова.

## 2.2. Координатизација Дезаргове равни

**Теорема 2.4.** Свака Дезаргова раван је аналитичка раван над неким телом.

**Теорема 2.5.** Свака Папосова раван је аналитичка раван над неким пољем.

Тело кватерниона $\mathbb{H}$ представља алгебарско проширење комплексних бројева. У питању је четвородимензиони векторски простор над реалним бројевима са базом $1, i, j, k$ где су $i$, $j$ и $k$ имагинарне јединице за које важи $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

$\mathbb{H}$ није поље, јер множење кватерниона није комутативно тј. $ij \neq ji$ јер $k \neq -k$. Аналитичка раван $\mathbb{H}P^2$ је Дезаргова, а није Папосова.

Теорема 2.6. Коначна пројективна раван је Папосова акко је Дезаргова.

→ Лако следи из Ведербернове теореме која каже да је свако коначно тело загрaво поље.

# 1.12. Конике Папосове равни

Уводимо конике у Папосовој равни тј. подразумевамо да важе Аксиоме 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4.

Деф (Штајнерова дефиниција) Нека је $f : (P) \barwedge (Q)$ пројективитет успостављен између праменова правих у Папосовој равни.

**Коника** је скуп тачака које се налазе у пресеку одговарајућих правих при том пројективитету. Ако је $P \neq Q$ и $f$ није перспективитет кажемо да је коника **Недегенерисана.**

→ $X$ је тачка конике ако постоји права $l$ инцидентна са $P$, тако да је $X$ инцидентно и са $l$ и са $f(l)$.

Уобичајено је $f(l) \neq l$ и тада су тачке конике сецишта $X = l \wedge f(l)$, али се може догодити да је $f(l) = l$ где је онда $X$ свака од тачака инцидентна са $l$.

Ако је коника $\Gamma$ одређена пројективитетом $f$ то ћемо краће обележавати са $f : (P) \overset{\Gamma}{\barwedge} (Q)$

**Лема 1,44.** Ако је $f : (P) \overset{\Gamma}{\barwedge} (Q)$, тада важи $P, Q \in \Gamma$.

Размотримо сада дегенерисан случај конике када је $\Gamma$ коника одређена перспективитетом $f: (P) \overset{\Delta}{\barwedge} (Q)$ за $P \neq Q$.

Како је по Теореми о перспективитету пројективитет перспективитет акко фиксира заједнички елемент онда је $f(P \vee Q) = Q \vee P$ па све тачке низа $(P \vee Q)$ припадају $\Gamma$.

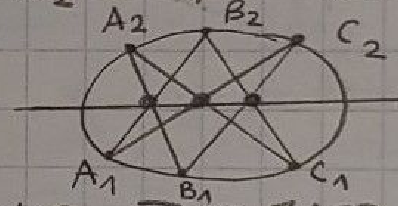
Произвољна права $l$ прамена $(P)$, њена слика $f(l)$ и оса $\Delta$ су конкурентне праве, тако да преостале тачке конике $\Gamma$ припадају низу $(\Delta)$. Конику у овом случају представљају две праве (које се наравно секу), $\Gamma = (\Delta) \cup (P \vee Q)$.

**Лема 1.45** Недегенерисана коника и права могу имати највише две заједничке тачке.

**Деф** Тангента на конику $\Gamma$ је права која са $\Gamma$ има тачно једну заједничку тачку.

**Теорема 1.48.** (Паскалова теорема) Три сецишта наспрамних страница простог шестотеменика уписаног у недегенисану конику су колинеарне тачке.

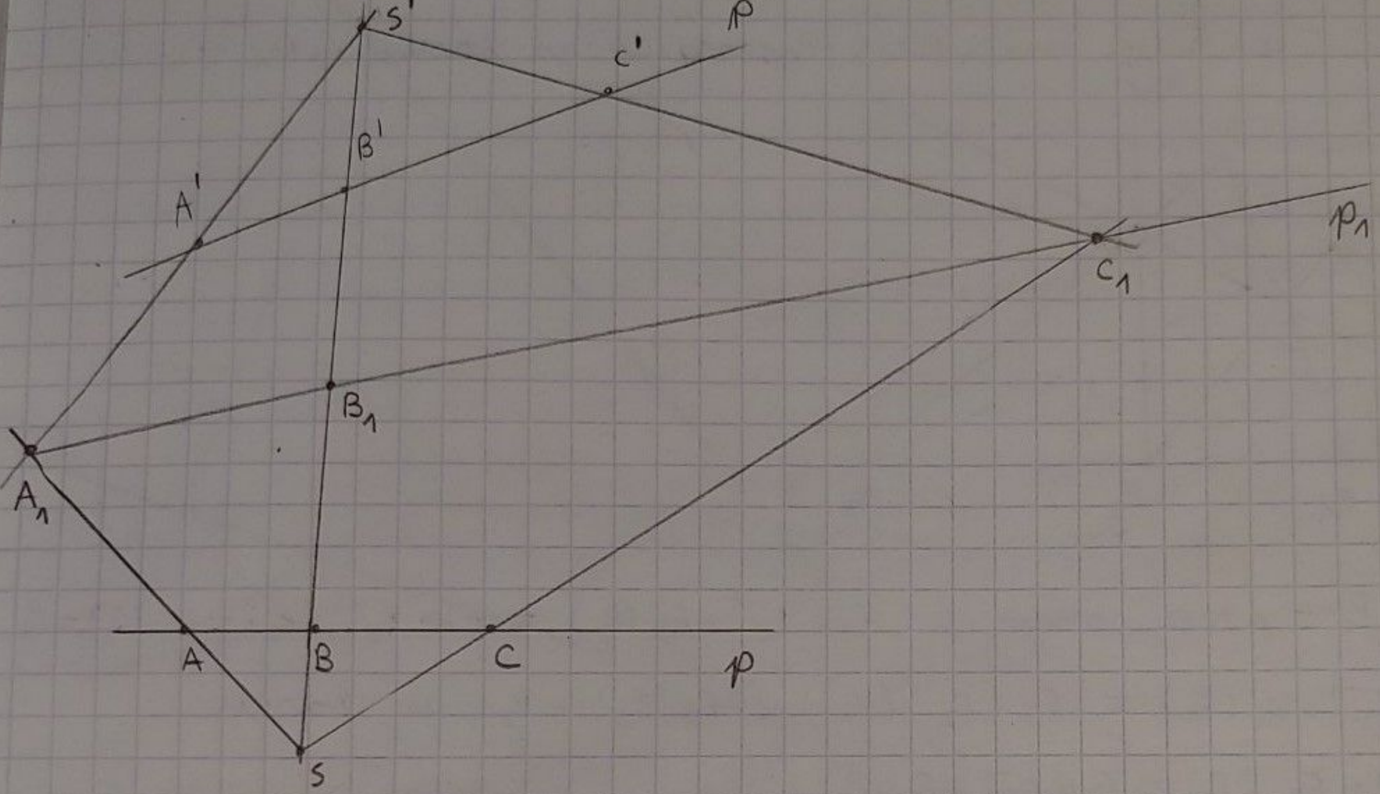
Ако је $\underline{A_1B_2}C_1\underline{A_2B_1}C_2$ прост шестотеменик чија темена припадају недегенерисаној коници, тада су сецишта наспрамних страница $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке.




Праву која садржи те колинеарне тачке називамо Паскалова права. Паскалова теорема важи и у граничним случајевима када се две суседне тачке простог шестотеменика поклопе нпр. ако је у простом шестотеменику $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ $A_1 = B_2$ добијамо гранични петотеменик у којем страницу $A_1 \vee B_2$ третирамо као тангенту на конику у тој тачки. Слично можемо посматрати и гранични четворотеменик и тротеменик.

(3.6.) Дате су различите тачке A, B, C праве $p$ и различите тачке $A'$, $B'$, $C'$ праве $p'$. Одредити слику произвољне тачке $D \in p$ при пројективитету који пресликава A, B, C редом у $A'$, $B'$, $C'$. Дискутовати и случај $p = p'$.

(*) По Теореми 1.22. у Дезарговој равни сваки пројективитет два различита низа тачака се може растављати на композицију два перспективитета за $p \neq p'$, а на композицију три перспективитета за $p = p'$. Симулирамо доказ Теореме 1.18., али се не бавимо ограничењима везаним за број тачака на правој већ подразумевамо да важе све претпоставке задатка. Највише два од слова $A, B, C, A', B', C'$ може бити укључено у $p \wedge p'$ па без умањења општости можемо узети да су тачке B и $B'$ различите од $p \wedge p'$, иначе можемо испермутовати слова. На правој $BB'$ изаберимо произвољне тачке $S$ и $S'$ различите од $B$ и $B'$. Означимо даље $A_1 = SA \wedge S'A'$, $C_1 = SC \wedge S'C'$ и $B_1 = SS' \wedge A_1C_1$, као и праву $A_1C_1$ са $p_1$.




За перспективитете $f_1 : (p) \overset{S}{\barwedge} (p_1)$ и $f_2 : (p_1) \overset{S'}{\barwedge} (p')$

имамо да $(A, B, C) \xmapsto{f_1} (A_1, B_1, C_1) \xmapsto{f_2} (A', B', C')$

По Основној теореми пројективитета постоји јединствени пројективитет који различите колинеарне тачке $A, B, C$ пресликава редом у различите колинеарне тачке $A', B', C'$, па је наш пројективитет $f_2 \circ f_1 : (p) \barwedge (p')$, а тражена слика произвољне тачке $D \in p$ је $D' = f_2(f_1(D))$ тј. прво конструишемо $D_1 = f_1(D) = SD \wedge p_1$, а затим $D' = f_2(D_1) = S'D_1 \wedge p'$

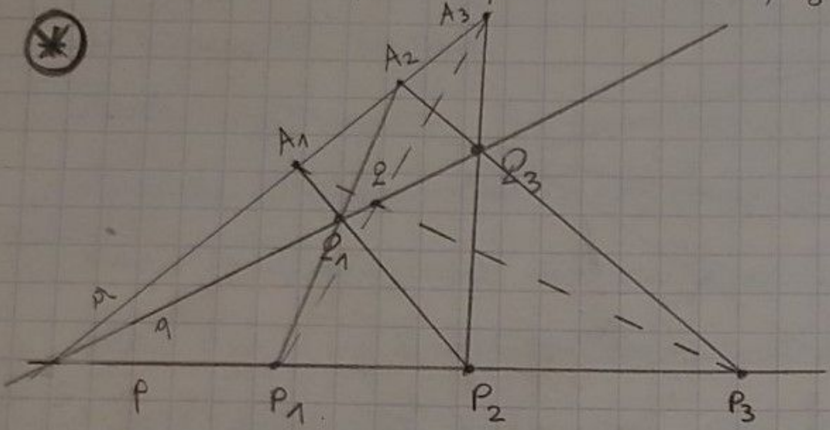
За случај $p = p'$ довољно је изабрати произвољну тачку $T \notin p$ и праву $p_2 \neq p$ ван $T$ и уочимо перспективитет $f: (p) \overset{T}{\overline{\wedge}} (p_2)$

Тада $(A, B, C) \xmapsto{f} (f(A), f(B), f(C))$ при чему $f(A) \, I \, p_2$, $f(B) \, I \, p_2$, $f(C) \, I \, p_2$ и $p_2 \neq p$ па на већ описан начин помоћу два перспективитета можемо пресликати тројку тачака $(f(A), f(B), f(C))$ у тројку $(A', B', C')$ па закључујемо да се наш пројективитет може представити као композиција наведена три перспективитета. $f_2 \circ f_1 \circ f : (p) \overline{\wedge} (p)$

$\Delta_1 = f(\Delta) = \Delta T \wedge p_2$, $\Delta_2 = f_1(\Delta_1) = \Delta_1 S \wedge p_1$ и $\Delta' = f_2(\Delta_2) = S'\Delta_2 \wedge p$.

**3.9.** Дате су конкурентне праве $a, p, q$ и тачке $A_1, A_2, A_3 \in a$.
Ако је $f_i : (p) \overset{A_i}{\overline{\wedge}} (q)$ за $i = 1,2,3$, доказати да важи $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$

✱

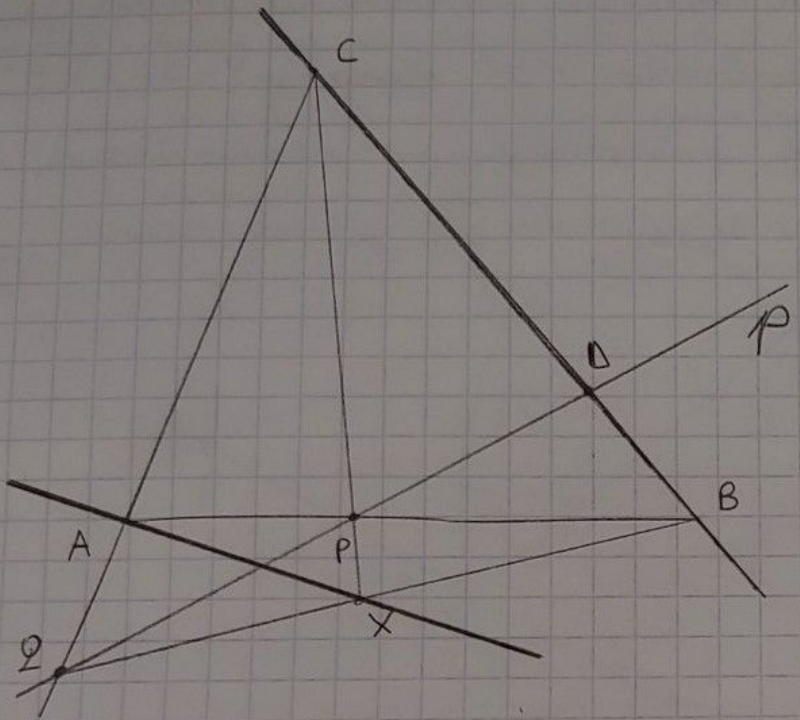



Ако је $P_2 = p \wedge a$ онда је $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3(P_2) = f_1 \circ f_2^{-1}(P_2) = f_1(P_2) = P_2$
и $f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1(P_2) = f_3(f_2^{-1}(P_2)) = f_3(P_2) = P_2$, па важи
$f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3(P_2) = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1(P_2)$.

За произвољну тачку $P_2 \in p$ различиту од $p \wedge a$ нека је
$Q_1 = f_1(P_2)$ и $Q_3 = f_3(P_2)$ тј. $Q_1 = A_1P_2 \wedge q$ и $Q_3 = A_3P_2 \wedge q$
Сада посматрамо $P_1 = f_2^{-1}(Q_1) = A_2Q_1 \wedge p$ и $P_3 = f_2^{-1}(Q_3) = A_2Q_3 \wedge p$
Применом Папосове теореме на тројке колинеарних тачака $A_1, A_2, A_3 \in a$ и $P_1, P_2, P_3 \in p$ добијамо да су колинеарне тачке $A_1P_2 \wedge A_2P_1 = Q_1$, $A_2P_3 \wedge A_3P_2 = Q_3$ и $A_1P_3 \wedge A_3P_1 = Q$ одакле $Q \in Q_1Q_3 = q$. Даље је $f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1(P_2) = f_3 \circ f_2^{-1}(Q_1) =$
$= f_3(P_1) = A_3P_1 \wedge q = Q$ и $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3(P_2) = f_1(f_2^{-1}(Q_3)) =$
$= f_1(P_3) = A_1P_3 \wedge q = Q$ одакле следи да је $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$.

**3.30.** Кроз тачку $D$ странице $BC$ троугла $ABC$ пролази права $p$ која сече странице $AB$ и $AC$ редом у тачкама $P$ и $Q$. Праве $CP$ и $BQ$ секу се у тачки $X$. Шта је геометријско место тачака $X$ када $p \ni D$?

(*) Како је $X = CP \wedge BQ$ потребно је направити пројективитет $f$ за који је $f(BQ) = CP$.




Уочимо $f_1 : (B) \overset{AC}{\overline{\wedge}} (D)$ и $f_2 ; (D) \overset{AB}{\overline{\wedge}} (C)$ и онда имамо

$$BQ \xmapsto{f_1} (BQ \wedge AC) \vee D = Q \vee D = p \xmapsto{f_2} (p \wedge AB) \vee C = P \vee C = CP.$$

Тако добијамо пројективитет $f = f_2 \circ f_1 : (B) \overline{\wedge} (C)$ такав да је $f(BQ) = CP$ и по Штајнеровој дефиницији тражено геометријско место тачака $X$ је коника. Како је по услову задатка $ABC$ троугао то сматрамо да је $B \neq C$ па да бисмо испитали дегенерисаност конике тражимо слику заједничког елемента $B \vee C$, $f(BC) = f_2(f_1(BC)) =$

$= f_2((BC \wedge AC) \vee D) = f_2(C \vee D) = f_2(CD) = (CD \wedge AB) \vee C = B \vee C = BC$

па На основу Теореме о перспективитету важи да је $f$ перспективитет па је коника дегенерисана и важи $\Gamma = BC \cup s$ где је $s$ оса перспективитета $f : (B) \overset{s}{\barwedge} (C)$

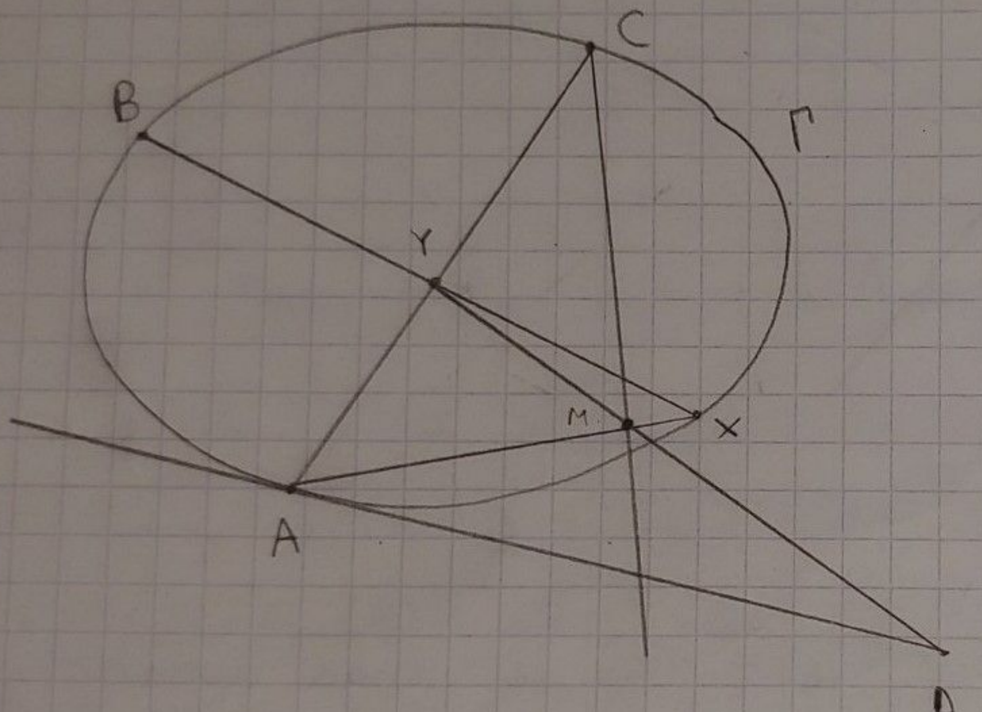
Како је $f(AB) = f_2(f_1(AB)) = f_2((AB \wedge AC) \vee \Delta) = f_2(A \vee \Delta) =$
$= f_2(A\Delta) = (A\Delta \wedge AB) \vee C = A \vee C = AC$ па $AB \wedge AC = A \in \Gamma$,

одакле је $\Gamma = BC \cup AX$ где је $X$ нека тачка конике.

Дакле, тражено геометријско место тачака $X$ када $p \ni \Delta$ је $\Gamma = BC \cup AX$ где је $X$ једна од тачака које задовољавају услов задатка.

**3.31.** Дата је недегенерисана коника $\Gamma$ и различите тачке $A, B, C \in \Gamma$ и $\Delta \notin \Gamma$. За произвољно $X \in \Gamma$ нека је $Y = BX \wedge AC$, те $M = AX \wedge \Delta Y$. Доказати да је геометријско место тачака $M$ када $X \in \Gamma$ једна коника и испитати јој дегенерисаност.

*




Како је $M = AX \wedge \Delta Y$, потребно је направити пројективитет $f$ за који је $f(AX) = \Delta Y$. Ако поставимо $f_1 : (A) \overset{\Gamma}{\barwedge} (B)$ и $f_2 : (B) \overset{AC}{\doublebarwedge} (\Delta)$ имамо

$$AX \overset{f_1}{\longmapsto} BX \overset{f_2}{\longmapsto} (BX \wedge AC) \vee \Delta = Y \vee \Delta = \Delta Y$$

те добијамо $f = f_2 \circ f_1 : (A) \barwedge (\Delta)$ тј. $f(AX) = \Delta Y$ и геометријско место тачака је коника $\Gamma_1$. Како тј. $f(AX)=\Delta Y$ и геометријско место тачака је коника $\Gamma_1$. Како $A\in\Gamma$ и $\Delta\notin\Gamma$ то $A\neq\Delta$ па дегенерисаности даје услов перспективитета $f(A\Delta)=\Delta A$ што се своди на $f_2\circ f_1(A\Delta)=\Delta A$ тј.

$f_1(A\Delta)=f_2^{-1}(\Delta A)=(\Delta A\wedge AC)\vee B = A\vee B = AB$ тј. $f_1(A\Delta)=BA$

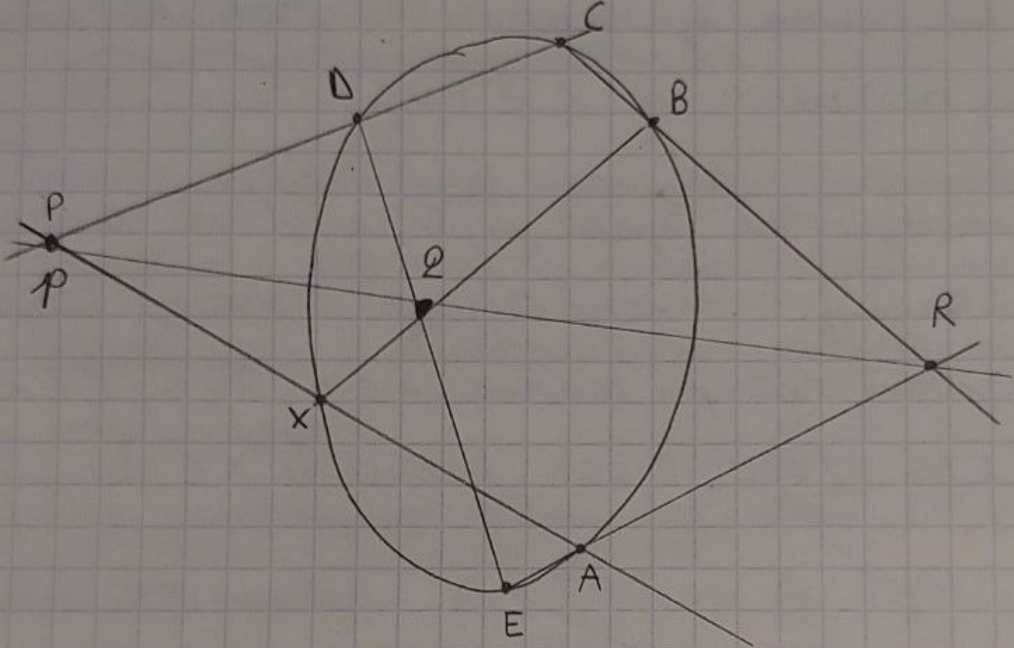
што се дешава само уколико је $A\Delta$ тангента на $\Gamma$ у тачки $A$. Дакле, $\Gamma_1$ је дегенерисана коника акко је $A\Delta$ тангента на $\Gamma$ у тачки $A$.

Приметимо да $AC \xmapsto{f_1} BC \xmapsto{f_2} (BC\wedge AC)\vee\Delta = \Delta C$ па

$AC\wedge\Delta C = C\in\Gamma_1$, док $A\in\Gamma_1$ и $\Delta\in\Gamma_1$ имамо на основу Леме 1.44. У случају дегенерисане конике имамо $\Gamma_1 = A\Delta\cup MC$ где је $M$ нека тачка конике коју смо већ одредили.

**3.33.** Дате су тачке $A, B, C, D, E$ недегенерисане конике $\Gamma$ и права $p \ni A$. Конструисати другу пресечну тачку праве $p$ и конике $\Gamma$.

⊛

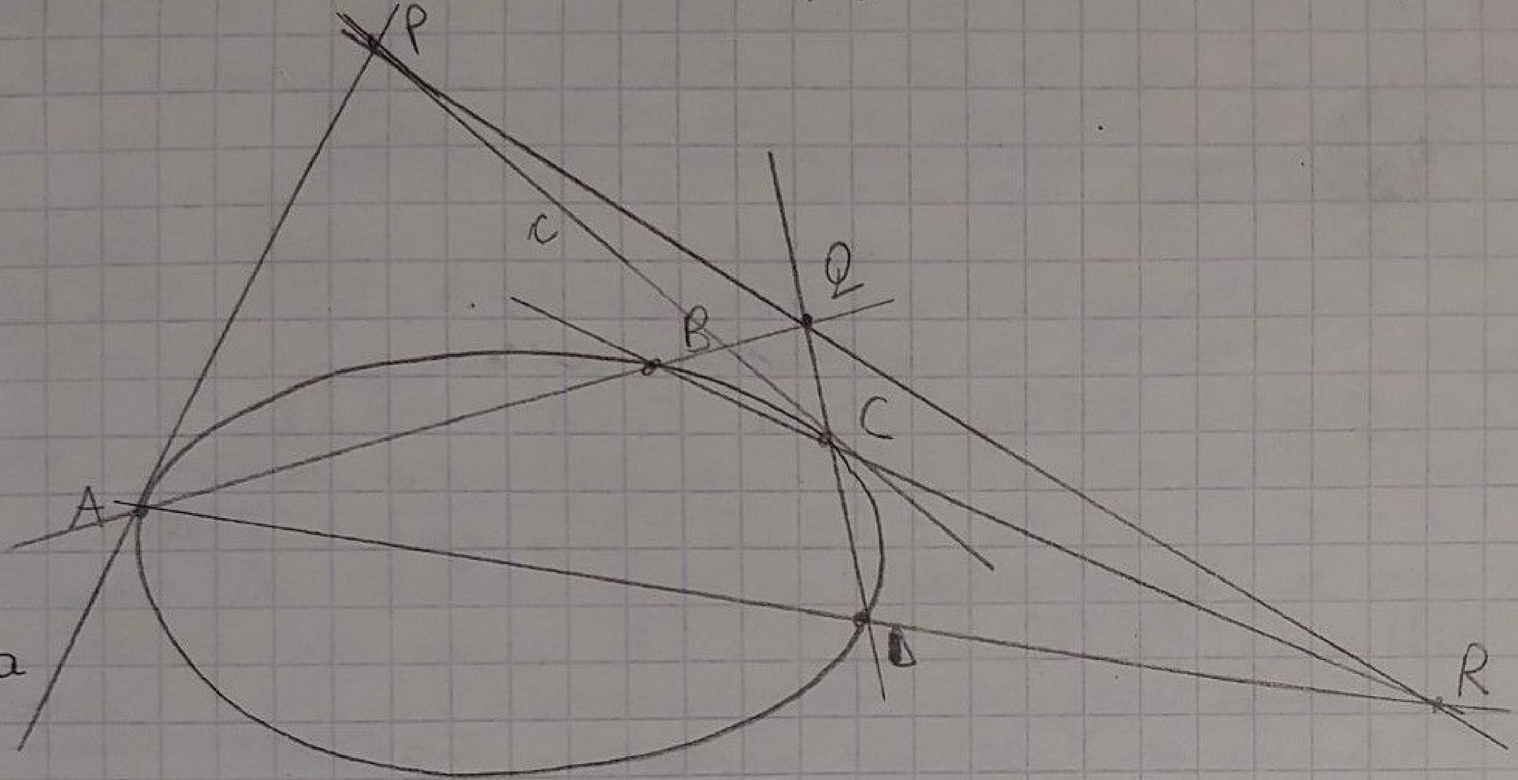



Применимо Паскалову теорему на прост шестотеменик $AXBCDE$ где је $X$ тражена тачка тј. $\Gamma \cap p = \{A, X\}$.

На Паскаловој правој су тачке $P = AX \wedge CD = p \wedge CD$, $Q = XB \wedge DE$ и $R = BC \wedge EA$, одакле закључујемо да $Q \in PR$. Сада су праве $XB, DE, PR$ конкурентне у тачки $Q$ па можемо конструисати тачку $Q = PR \wedge DE$, а затим и тачку $X = BQ \wedge p$, јер $Q \in XB$ па $X \in BQ$ и $X \in p$.

**3.34.** Дате су тачке $A, B, C, D$ недегенерисане конике $\Gamma$ и њена тангента $a \ni A$. Конструисати тангенту на $\Gamma$ у тачки $C$.

(*)

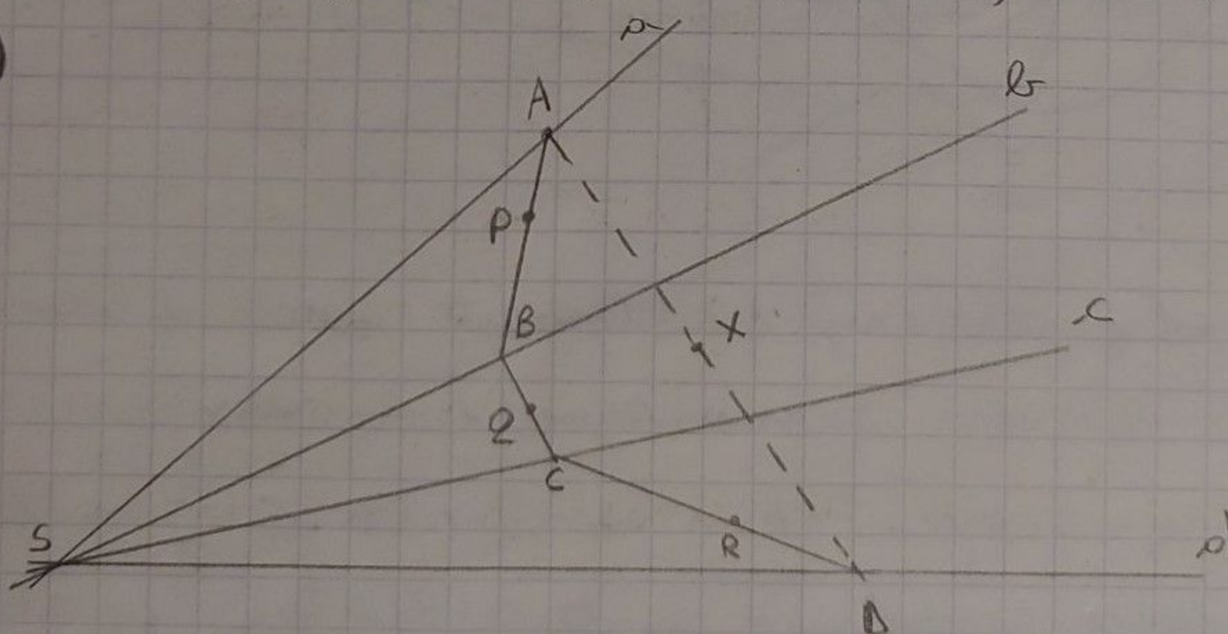


Применом Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $AABCCD$ добијамо колинеарне тачке $P = a \wedge c$, $Q = AB \wedge CD$ и $R = BC \wedge DA$ где је $c$ тражена тангента у тачки $C$. Можемо конструисати $P = a \wedge RQ$, а затим и $c = PVC$.

Д-3.

**3.10.** Дате су конкурентне праве $a, b, c, d$ и тачке $P, Q, R$ које им не припадају. Доказати да постоји тачка $X$ таква да за сваке четири тачке $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$ за које је $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$, важи и $X \in AD$.

(*)



Уочимо $f_1 = (a) \overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}} (b)$, $f_2 = (b) \overset{Q}{\overline{\overline{\wedge}}} (c)$, $f_3 = (c) \overset{R}{\overline{\overline{\wedge}}} (d)$ и

поставимо $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 : (a) \overline{\wedge} (d)$.

Нека су праве $a, b, c, d$ конкурентне у тачки $S$.

Тада је $f(S) = f_3(f_2(f_1(S))) = f_3(f_2(S)) = f_3(S) = S$

и $S = a \wedge d$ тј. $f$ је пројективитет који фиксира заједнички елемент па је по Теореми о перспективитету $f$ перспективитет тј, постоји тачка $X$ таква да $f = (a) \overset{X}{\overline{\overline{\wedge}}} (d)$. За сваке четири тачке $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$ за које је $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$ важи $f_1(A) = AP \wedge b = B$, $f_2(B) = BQ \wedge c = C$, $f_3(C) = CR \wedge d = D$, дакле $f(A) = f_3(f_2(f_1(A))) = f_3(f_2(B)) = f_3(C) = D$ што због $f = (a) \overset{X}{\overline{\overline{\wedge}}} (d)$ значи да $X \in AD$ па је $X$ заиста тражена тачка.