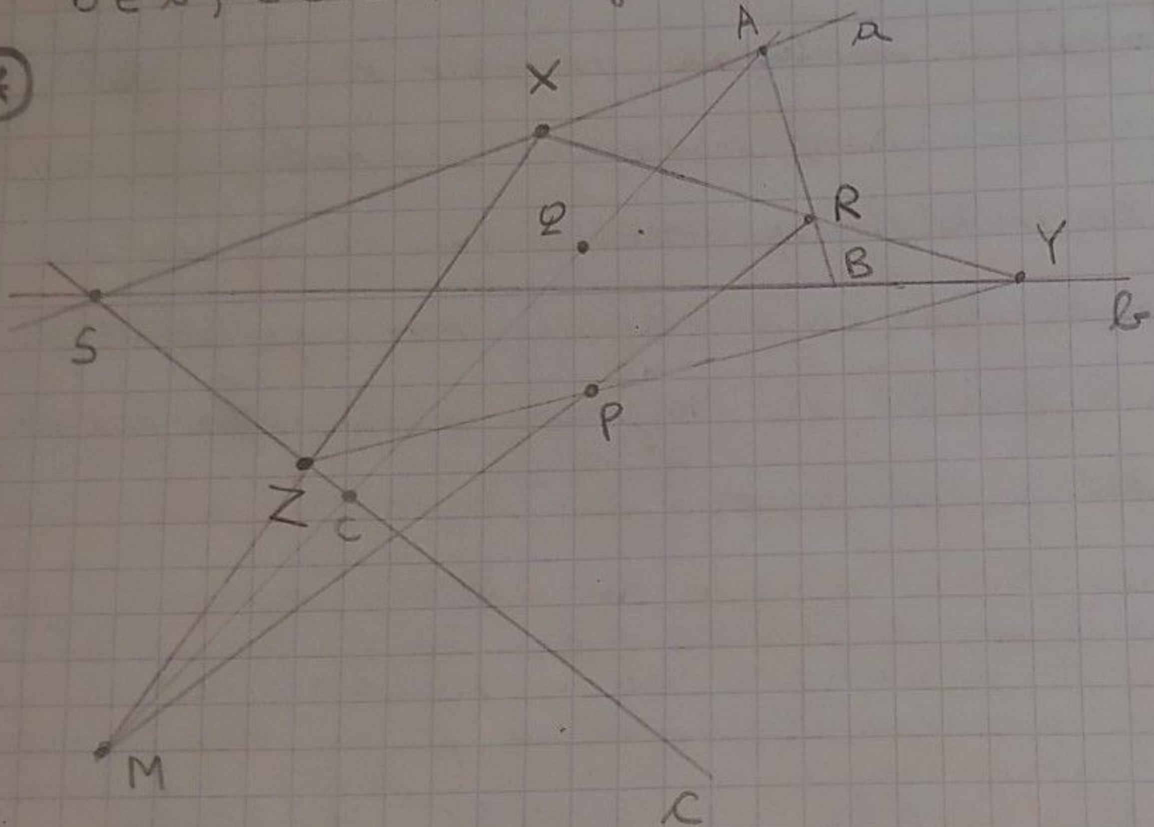
3.4. Дате су конкурентне праве a, b, c и тачке P, Q, R које им не припадају. Одредити тачке $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ тако да важи $P \in BC$, $Q \in AC$, $R \in AB$.

*



Нека су праве a, b и c инцидентне са тачком S.
Уочимо за почетак произвољну тачку $Z \in c$.
Желимо да уочимо троугао XYZ који задовољава што више особина као тражени троугао ABC, тј. да тачке X, Y и Z „имитирају" тачке A, B и C редом.

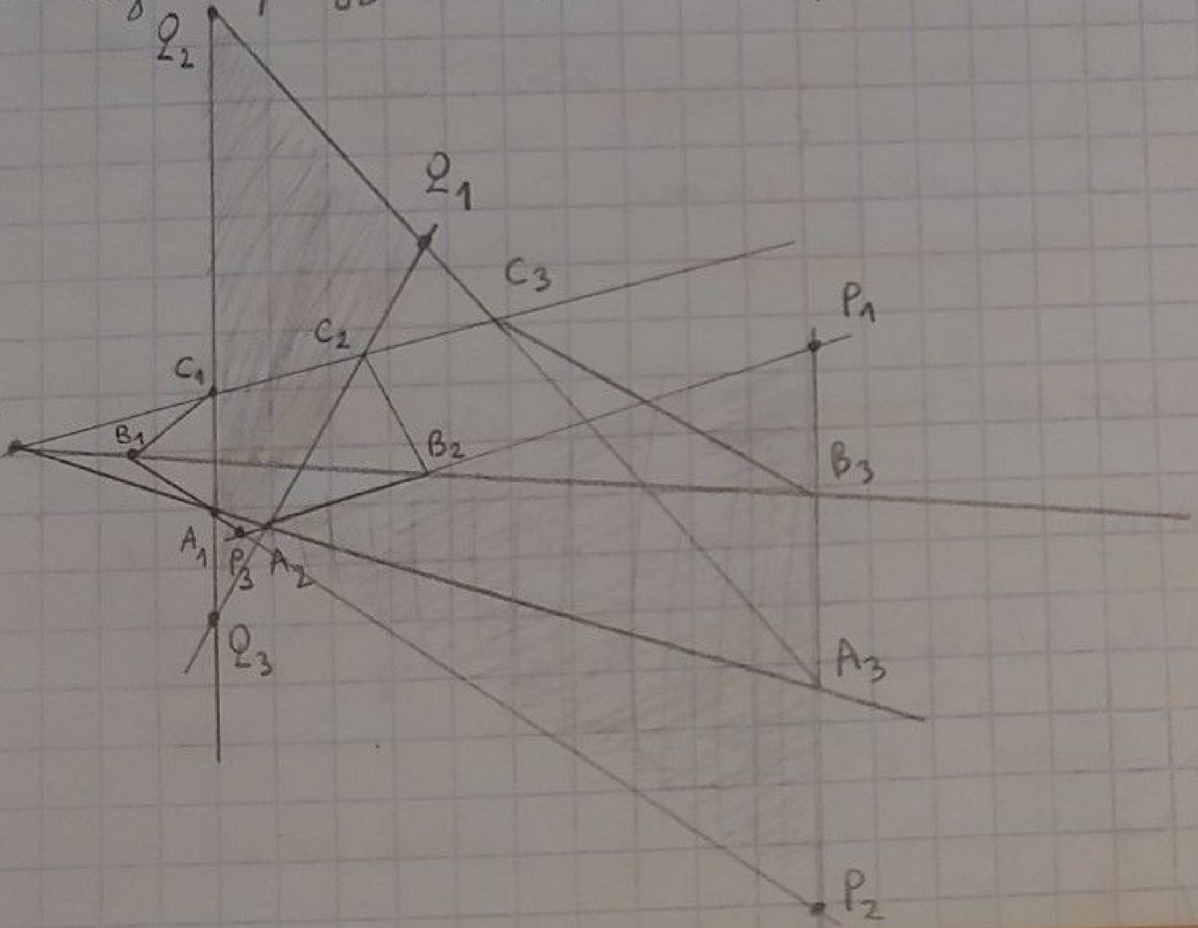
Дакле, Y треба да лежи на правој b и $P \in YZ$ (јер за тачке B и C треба да важи $P \in BC$), тј. $Y = ZP \wedge b$. Даље, тачка X треба да лежи на правој a и $R \in YX$ (јер $A \in a$ и $R \in AB$) па је $X = YR \wedge a$. Да би троугао XYZ постао троугао ABC фали му још само услов $Q \in XZ$.

Кад посматрамо троуглове XYZ и ABC одговарајуће праве XA, YB и ZC су конкурентне у тачки S, тј. ови троуглови су перспективни у односу на центар S па су на основу Дезаргове тврђења перспективни и у односу на праву, тј. пресеци одговарајућих правих

$XY \wedge AB = R$ ($R \in AB$ и $R \in XY$), $YZ \wedge BC = P$ ($P \in BC$, $P \in YZ$) и $XZ \wedge AC$ што можемо означити са M колинеарне тачке. Дакле, $M = XZ \wedge PR$ (јер $M \in PR$ и $M \in XZ$) а онда можемо добити и тачке $A = MQ \wedge a$ (јер $M \in AC$ и $Q \in AC$ па је тачка A на правој MQ). $B = AR \wedge b$ (да би $B \in b$ и $R \in AB$) и $C = MQ \wedge c$. Остаје још да проверимо да $P \in BC$ (сви остали услови за ΔABC важе). Посматрајмо троуглове XYZ и ABC и приметимо да се одговарајуће праве XA, YB и ZC секу у тачки S па су они перспективни у односу на тачку одакле применом Дезарговог тврђења закључујемо да су перспективни и у односу на осу тј. тачке $XY \wedge AB = R$ (јер $R \in XY$ и $B \in AR$), $XZ \wedge AC = M$ (јер $M \in XZ$ и $A \in MQ$ и $C \in MQ$ па $M \in AC$) и $YZ \wedge BC$ су колинеарне тачке одакле закључујемо да је тачка $YZ \wedge BC$ на правој MR а и на правој YZ а једина таква тачка је тачка P (јер $P \in YZ$ и $M \in PR$ па $P \in MR$). Дакле, $YZ \wedge BC = P$ па $P \in BC$ тј. добијени троугао ABC заиста задовољава све услове задатка.

3.5. Три троугла имају заједнички центар перспективе. Доказати да су одговарајуће три осе перспективе конкурентне праве.

⊛



Посматрајмо дата три троугла $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ који имају заједнички центар перспективе S.

Применимо Дезаргово тврђење на троуглове $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ који су перспективни у односу на тачку S па су перспективни и у односу на осу, тј. тачке $P_3 = A_1B_1 \wedge A_2B_2$, $Q_3 = A_1C_1 \wedge A_2C_2$ и $R_3 = B_1C_1 \wedge B_2C_2$ су колинеарне и припадају оси $s_3 = P_3 \vee Q_3$. Слично, применом Дезарговог тврђења на троуглове $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$ добијамо осу $s_2 = P_2 \vee Q_2$ где су $P_2 = A_1B_1 \wedge A_3B_3$ и $Q_2 = A_1C_1 \wedge A_3C_3$, а када Дезаргово тврђење применимо на троуглове $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ добијамо осу $s_1 = P_1 \vee Q_1$ где су $P_1 = A_2B_2 \wedge A_3B_3$ и $Q_1 = A_2C_2 \wedge A_3C_3$.

Посматрајмо сада троуглове $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ и приметимо да су пресеци одговарајућих правих $P_1P_2 \wedge Q_1Q_2 = A_3$ (јер $P_1 \in A_3B_3$, $P_2 \in A_3B_3$ па су тачке P_1, P_2 и A_3 колинеарне и слично $Q_1 \in A_3C_3$ и $Q_2 \in A_3C_3$ па су тачке Q_1, Q_2 и A_3 колинеарне), $P_1P_3 \wedge Q_1Q_3 = A_2$ (јер $P_1 \in A_2B_2$, $P_3 \in A_2B_2 \Rightarrow A_2 \in P_1P_3$, $Q_1 \in A_2C_2$, $Q_3 \in A_2C_2 \Rightarrow A_2 \in Q_1Q_3$) и $P_2P_3 \wedge Q_2Q_3 = A_1$ (јер $P_2 \in A_1B_1$, $P_3 \in A_1B_1 \Rightarrow A_1 \in P_2P_3$, $Q_2 \in A_1C_1$, $Q_3 \in A_1C_1 \Rightarrow A_1 \in Q_2Q_3$) колинеарне тачке па су троуглови $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ перспективни у односу на осу па су на основу Обрнутог Дезарговог тврђења троуглови $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ перспективни у односу на тачку тј. праве P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 су конкурентне, тј. осе перспективе s_1, s_2 и s_3 су конкурентне праве што је и требало доказати.

Специјални случајеви се лако испитују. Нпр. ако је $P_1 = P_2$ тј. $A_2B_2 \wedge A_3B_3 = A_1B_1 \wedge A_3B_3 \Rightarrow$ праве A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 су конкурентне $\Rightarrow A_1B_1 \wedge A_2B_2 = A_2B_2 \wedge A_3B_3$ тј. $P_3 = P_1$ што даје $P_1 = P_2 = P_3 \in s_i$ за свако $i \in \{1,2,3\}$.

1.8. Пројективитети

Пројективитет је композиција коначно много перспективитета.
и обележавамо га ознаком $(x) \overline{\wedge} (y)$, где су (x) и (y) редом домен и кодомен, једнодимензиони објекти (низови тачака или праменови правих).

Теорема 1.18. Постоји пројективитет који различите тачке A_1, B_1, C_1 праве p_1, пресликава редом у различите тачке A_2, B_2, C_2 праве p_2.

1.9. Аналитичка пројективна права

Посматрамо аналитичку пројективну раван $\mathbb{F}P^2 = (T_{\mathbb{F}}, P_{\mathbb{F}}, I_{\mathbb{F}})$ индуковану пољем $\mathbb{F}$.

- Тачка C припада правој $A \vee B$ ако и само ако је $(\overrightarrow{A \vee B}) \cdot \vec{C} = 0$ што се због Леме 1.5. своди на $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = 0$ тј. $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = 0$ где је $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ мешовити производ вектора.

<u>Лема 1,24</u> Важи $C \in (A \vee B)$ акко је $\vec{C} = \mu\vec{A} + \nu\vec{B}$ за неке $\mu, \nu \in \mathbb{F}$ без $\mu = 0 = \nu$.

- <u>Аналитичку пројективну праву</u> чине све тачке инцидентне са неком правом из $\mathbb{FP}^2$ и обележавамо је са $\mathbb{FP}^1$.

  Хомогене параметре $(\mu ; \nu)$ тачке C у односу на конкретне векторе представнике $\vec{A}$ и $\vec{B}$ тачака A и B добијамо помоћу Леме 1.24.

- Тачке $(\mu ; \nu)$ аналитичке праве $\mathbb{FP}^1$ са $\nu \neq 0$ поистовећујемо са елементима поља $\mathbb{F}$ помоћу $(\mu : \nu) = (\frac{\mu}{\nu} : 1) \mapsto \frac{\mu}{\nu}$

  Преостала тачка $(\mu : 0) = (1 ; 0)$ је налик бесконачној тачки из интуитивне равни и додељујемо јој симбол ∞.

$\overline{\mathbb{F}} = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ проширење поља

$* : \mathbb{FP}^1 \to \overline{\mathbb{F}}$ $\quad (\mu : \nu)^* = \frac{\mu}{\nu}$ дехомогенизација

Теорема 1.25 Аналитичка пројективна раван је Дезаргова раван.

Теорема 1.26 Пројективитет у $\mathbb{FP}^2$ је индукован регуларном линеарном трансформацијом.

Теорема 1.27 Промена координата у $\mathbb{FP}^1$ је индукована регуларном линеарном трансформацијом

$$\lambda \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \varrho \end{pmatrix}$$

$\vec{C} = \mu\vec{A} + \nu\vec{B}$ $\quad \vec{P} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$

$\vec{C} = \xi\vec{P} + \varrho\vec{Q}$ $\quad \vec{Q} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$

Теорема 1.28 Нека су дати хомогени координатни системи за праве p и q из $\mathbb{FP}^2$. Постоји јединствено пресликавање индуковано регуларном линеарном трансформацијом које произвољне три различите тачке са p пресликава редом у произвољне три различите тачке са q.

тачке са q.

Теорема 1.29. Пресликавање између једнодимензионих објеката у $\mathbb{FP}^2$ је пројективитет ако и само ако је оно индуковано регуларном линеарном трансформацијом хомогених координата.

1.10. Дворазмера

Деф Нека су A, B, C, D различите тачке у $\mathbb{FP}^1$, тада је њихова дворазмера $(ABCD)$ скалар из $\mathbb{F}$ дат са

$$(ABCD) = \frac{\det(\vec{A}, \vec{C}) \det(\vec{B}, \vec{D})}{\det(\vec{A}, \vec{D}) \det(\vec{B}, \vec{C})}$$

Дати израз не зависи од избора вектора представника нити од избора координатног система.

Теорема 1.30 Дворазмера је инваријанта пројективитета.

Дворазмера не може бити 0, 1 и ∞.

• Чест начин рачунања дворазмере је управо у координатном систему одређеним са $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

$$\vec{A}=(1,0), \quad \vec{B}=(0,1), \quad \vec{C}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}, \quad \vec{D}=\gamma\vec{A}+\delta\vec{B}$$

$$(ABCD)=\frac{\beta(-\gamma)}{\delta(-\alpha)}=\frac{\beta}{\alpha}:\frac{\delta}{\gamma}$$

Теорема 1.31. За различите тачке A,B,C,D из $\mathbb{FP}^1$ важи:

$$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA)$$

$$(BACD)=(ABCD)^{-1}=(ABDC)$$

$$(ACBD)=1-(ABCD)$$

Важи и
$$(ABCD)=\frac{(A^*-C^*)(B^*-D^*)}{(A^*-D^*)(B^*-C^*)}=\frac{\vec{AC}}{\vec{AD}}:\frac{\vec{BC}}{\vec{BD}}$$

Лема 1.32 За три различите тачке A,B,C у $\mathbb{FP}^1$ и скалар $a\in\mathbb{F}\setminus\{0,1\}$ постоји јединствена тачка D таква да је $(ABCD)=a$.

(4.2.) За дате тачке $A(0:1)$, $B(1:0)$, $C(1:1)$, $D(3:2)$, одредити дворазмеру $(ABCD)$.

(✱) Посматрајмо векторе представнике $\vec{A}=(0,1)$, $\vec{B}=(1,0)$, $\vec{C}=(1,1)$ и $\vec{D}=(3,2)$ и приметимо да је $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}=1\cdot\vec{A}+1\cdot\vec{B}$ и $\vec{D}=2\cdot\vec{A}+3\cdot\vec{B}$ и зато је $(ABCD)=\frac{1}{1}:\frac{3}{2}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

(4.4.) Нека су A_1, A_2, A_3, A_4 различите тачке реалне пројективне праве. Израчунати производ и суму дворазмера по свим пермутацијама тачака, односно

1) $$\prod_{\sigma\in S_4}(A_{\sigma 1}A_{\sigma 2}A_{\sigma 3}A_{\sigma 4})=(A_1A_2A_3A_4)(A_1A_2A_4A_3)\cdot\ldots\cdot(A_4A_3A_2A_1)$$

2) $$\sum_{\sigma\in S_4}(A_{\sigma 1}A_{\sigma 2}A_{\sigma 3}A_{\sigma 4})=(A_1A_2A_3A_4)+(A_1A_2A_4A_3)+\ldots+(A_4A_3A_2A_1)$$

(✱) 1) За различите тачке A, B, C, D аналитичке пројективне праве важи $(ABCD)\cdot(ABDC)=1$. Група S_4 има $4!=24$ пермутације и свака од њих има свој пар са којим у производу даје 1 и зато је тражени производ једнак $1^{12}=1$.

2) За различите тачке A, B, C, D аналитичке пројективне праве важи $(ABCD) + (ACBD) = 1$. Група S_4 има $4! = 24$ пермутације и свака од њих има свој пар са којим у збиру даје 1 па је тражени збир једнак $12 \cdot 1 = 12$.

4.6. Нека су A, B, C, D различите колинеарне тачке реалне пројективне равни. Доказати да је тачно једна негативна од три двоструке размере: $(ABCD)$, $(ACBD)$, $(ADBC)$.

(*) Означимо $x = (ABCD)$. Тада је $(ACBD) = 1 - (ABCD) = 1 - x$ и $(ADBC) = 1 - (ABDC) = 1 - \frac{1}{(ABCD)} = 1 - \frac{1}{x}$.

Приметимо да је $(ABCD) \cdot (ACBD) \cdot (ADBC) = x(1-x)(1-\frac{1}{x}) =$
$= (1-x)(x-1) = -(1-x)^2 < 0$ јер двоструке размера $x \neq 1$

Зато је непаран број од ове три двоструке размере негативан.

Како је $(ABCD) + (ACBD) = 1 > 0$ то не могу обе ове двоструке размере бити негативне тј. бар једна двоструке размера је позитивна. Дакле, постоји тачно једна негативна двоструке размера, а преостале две су позитивне.

4.7. Ако су дате дворазмере $(ABCD)$ и $(ACBE)$, изразити $(ADEB)$.

(*) Изразимо све векторе представнике помоћу вектора представника $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Ако је $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$, $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$, $\vec{E} = \mu\vec{A} + \nu\vec{B}$ онда је $(ABDE) = \frac{\delta}{\gamma} : \frac{\nu}{\mu} = \left(\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\nu}{\mu}\right) : \left(\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}\right) =$

$= (ABCE) : (ABCD)$

Користећи особине дворазмере добијамо

$$(ADEB) = \frac{1}{(ADBE)} = \frac{1}{1-(ABDE)} = \frac{1}{1 - \frac{(ABCE)}{(ABCD)}} = \frac{1}{1 - \frac{1-(ACBE)}{(ABCD)}} =$$

$$= \frac{(ABCD)}{(ABCD) - 1 + (ACBE)} = \frac{(ABCD)}{(ABCD) + (ACBE) - 1}$$

4.9. Тачке $A_1(2:1)$, $A_2(3:1)$ и $B(4:1)$ дате хомогеним координатама $(x_1 : x_2)$ одабране су редом за базне тачке новог система хомогених координата $(x_1' : x_2')$. Одредити везу између старих и нових координата.

(*) Промена координата у $\mathbb{RP}^1$ је индукована регуларном линеарном трансформацијом

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

У новом систему дате тачке су базне, односно имају координате $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2\lambda_1 = m_{11} \\ \lambda_1 = m_{21} \end{matrix}$$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3\lambda_2 = m_{12} \\ \lambda_2 = m_{22} \end{matrix}$$

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4\lambda_3 = m_{11} + m_{12} \\ \lambda_3 = m_{21} + m_{22} \end{matrix}$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}2\lambda_1&=m_{11}\\ \lambda_1&=m_{21}\end{aligned}$$

$$\lambda_2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}3\lambda_2&=m_{12}\\ \lambda_2&=m_{22}\end{aligned}$$

$$\lambda_3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}4\lambda_3&=m_{11}+m_{12}\\ \lambda_3&=m_{21}+m_{22}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad 4(m_{21}+m_{22})=m_{11}+m_{12}$$

$$\Rightarrow\quad 4(\lambda_1+\lambda_2)=2\lambda_1+3\lambda_2$$

$$4\lambda_1+4\lambda_2=2\lambda_1+3\lambda_2$$

$$-2\lambda_1=\lambda_2$$

$$m_{11}=2\lambda_1$$

$$m_{21}=\lambda_1$$

$$m_{12}=3\lambda_2=-6\lambda_1$$

$$m_{22}=\lambda_2=-2\lambda_1\,,\quad \text{где } \lambda_1\neq 0$$

$$\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-6\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$$

Ово је тражена веза између старих и нових координата.

4.10. Наћи формуле пројективитета који пресликава тачке $A(0:1)$, $B(1:0)$, $C(1:1)$ у тачке $A'(1:-1)$, $B'(1:1)$, $C'(1:3)$.

(*) Пројективитет је индукован регуларном линеарном трансформацијом $\lambda \vec{x}' = M\vec{x}$ где је $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$(0,1) \mapsto (1,-1)$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = m_{12}$

$-\lambda_1 = m_{22}$

$(1,0) \mapsto (1,1)$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = m_{11}$

$\lambda_2 = m_{21}$

$\lambda_1 = m_{12}$

$-\lambda_1 = m_{22}$

$\lambda_2 = m_{11}$

$\lambda_2 = m_{21}$

$(1,1) \mapsto (1,3)$

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = m_{11} + m_{12}$

$3\lambda_3 = m_{21} + m_{22}$

$\Rightarrow$

$3(m_{11} + m_{12}) = m_{21} + m_{22}$

$3(\lambda_2 + \lambda_1) = \lambda_2 - \lambda_1$

$3\lambda_2 + 3\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1$

$4\lambda_1 = -2\lambda_2$

$2\lambda_1 = -\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = -2\lambda_1$

$m_{11} = \lambda_2 = -2\lambda_1$

$m_{21} = \lambda_2 = -2\lambda_1$

$m_{12} = \lambda_1$

$m_{22} = -\lambda_1$

$$M \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Тражене формуле су $\lambda \vec{x'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$.