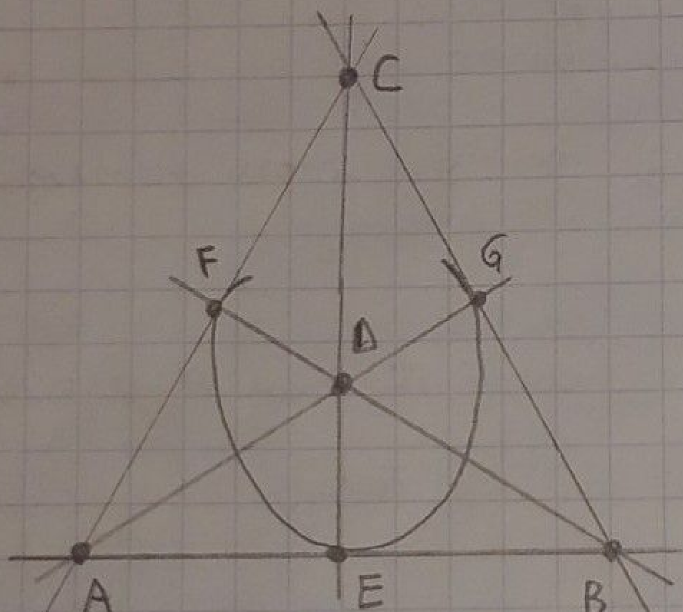
ДРУГИ ДВОЧАС

1.5. Коначна пројективна раван

Пројективна раван не мора имати бесконачан број елемената, пројективна раван са најмањим бројем тачака је Фаноова раван која има 7 тачака и 7 правих



Фаноова раван (свака права је инцидентна са тачно три тачке, а свака тачка је инцидентна са тачно три праве)

Деф Коначна пројективна раван је пројективна раван $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ за коју су скупови $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ коначни.

→ најлакше се добијају као аналитичке пројективне равни $\mathbb{F}P^2$ када је $\mathbb{F}$ коначно поље

→ За сваки прост број p имамо да је $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ поље.

→ Минималном пољу $\mathbb{Z}_2$ одговара аналитичка пројективна раван $\mathbb{Z}_2 P^2$, а то је заправо Фанова раван.

Лема 1.6. Свака права пројективне равни инцидентна је са бар три тачке.

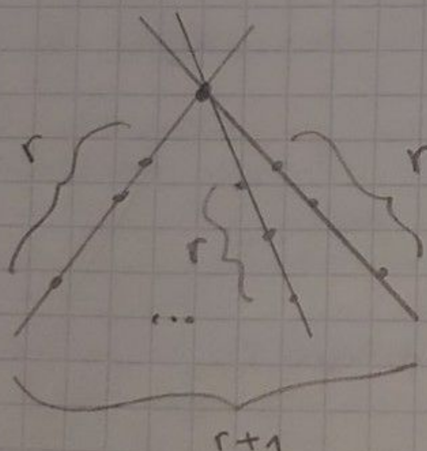
Принцип дуалности нам даје дуал Леме 1.6.

Лема 1.7. Свака тачка пројективне равни инцидентна је са бар три праве.

Лема 1.8 За коначну пројективну раван постоји константа k, таква да је свака права инцидентна са тачно k тачака, док је свака тачка инцидентна са тачно k правих.

Ако је k број из Леме 1.8. онда број $r = k-1$ зовемо **ред пројективне равни**.

Ред коначне пројективне равни је број за један мањи од броја тачака инцидентних са сваком правом.
Дакле, ако је r ред коначне пројективне равни, онда је број тачака на свакој правој $r+1$, а број правих кроз сваку тачку је такође $r+1$.



Кроз произвољну тачку пролази $r+1$ правих од којих свака поред посматране тачке садржи још r тачака. Све те тачке су различите (у супротном би неке од тих правих поред почетне тачке имале још једно сечиште) па је укупан број тачака $1+(r+1)\cdot r = r^2+r+1$

Лема 1.9 Коначна пројективна раван реда r садржи r^2+r+1 тачака и r^2+r+1 правих.

Број елемената коначног поља зовемо **ред поља.**

$\mathbb{Z}_p$ пример поља реда p

Ако је $\mathbb{F}_r$ коначно поље реда r и $\mathbb{F}_r P^2$ одговарајућа аналитичка пројективна раван број тачака те равни је $\frac{r^3-1}{r-1} = r^2+r+1$ јер имамо r^2 класа еквиваленције са векторима представницима $(x, y, 1)$ за произвољно $x, y \in \mathbb{F}_r$, затим r класа са представницима $(x, 1, 0)$ за произвољно $x \in \mathbb{F}_r$ и једна класа са представником

(1,0,0). Зато је ред аналитичке равни једнак реду коначног поља од којег раван потиче.

Из алгебре знамо да коначно поље реда r постоји ако и само ако му је ред степен простог броја, тј. $r=p^k$ где је p прост број и $k \in \mathbb{N}$ (за $f(x)$ – иредуцибилни полином степена k, $\mathbb{Z}_p[X]/(f(x))$ ће бити поље реда p^k где је $\mathbb{Z}_p[x]$ прстен свих полинома над $\mathbb{Z}_p$, а $(f(x))$ је идеал генерисан иредуцибилним полиномом $f(x)$)

$$r^2+r+1=r_1^2+r_1+1$$
$$r^2+r-r_1^2-r_1=0$$
$$r^2-r_1^2+r-r_1=0$$
$$(r-r_1)(r+r_1)+r-r_1=0$$
$$(r-r_1)\underbrace{(r+r_1+1)}_{\neq 0}=0$$
$$\Rightarrow r=r_1$$

Ред коначне пројективне равни може бити сваки степен простог броја $r=p^k$ (јер постоји коначно поље реда r па ће и њему одговарајућа раван бити реда r).

Нису све пројективне равни аналитичке (индуковане пољем) тако да то што не постоји коначно поље које није степен простог броја не значи да не постоји коначна пројективна раван тог реда. Са друге стране, још није позната ниједна пројективна раван која за ред нема степен простог броја.

<u>Теорема 2.13.</u> (Брук-Рајзер) Уколико постоји пројективна раван реда r за $r \equiv 1,2 \pmod 4$ тада је r збир два квадрата целих бројева.

→ ова теорема нам каже да не постоје пројективне равни реда $r = 6, 14, 21, 22, \ldots$

Број облика $8n+6$ не може бити ред пројективне равни.

$8n+6 \equiv 2 \pmod 4$ $\xRightarrow{\text{Брук-Рајзер}}$ $8n+6 = x^2 + y^2$

$z^2 \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} \pmod 8$

x^2	y^2
0	0
0	1
0	4
1	0
1	1
1	4
4	0
4	1
4	4

никако се не може добити остатак 6 при дељењу са 8

Компјутерски је доказано да пројективна раван реда 10 не постоји (Лам, Тиел, Сверц).

1. У некој пројективној равни постоји тачка која је инцидентна са тачно 4 праве. Колики је минималан, а колики максималан укупан број тачака те равни?

1. У некој пројективној равни постоји тачка која је инцидентна са тачно 4 праве. Колики је минималан, а колики максималан укупан број тачака те равни?

✱ Ако постоји тачка која је инцидентна са тачно 4 праве, онда дуално постоји права која је инцидентна са тачно 4 тачке, па можемо спровести доказ као у Леми 1.8. и онда постоји константа $K=4$ таква да је свака права инцидентна са тачно $K=4$ тачака и ред пројективне равни је тада једнак $r = K-1 = 4-1 = 3$, а број тачака у коначној пројективној равни реда $r=3$ је $r^2+r+1 = 3^2+3+1 = 13$ па је минимална и максимална вредност за укупан број тачака те равни једнак 13.

→ у тестовима Г4 10.05.2014. 1

t - укупан број тачака те пројективне равни

$$\boxed{13} \leq t \leq \boxed{13}$$

2. Колико има тачака, а колико правих у равни $\mathbb{Z}_5 P^2$? Колико тачака је инцидентно са сваком правом?

→ у тестовима Г4 03.06.2015. 4

⊛ $\mathbb{Z}_5$ је поље реда 5, па је ред пројективне равни $\mathbb{Z}_5\mathbb{P}^2$ једнак $r=5$, одакле следи да је укупан број тачака $r^2+r+1=5^2+5+1=31$, а то је уједно и укупан број правих. Како је ред пројективне равни $\mathbb{Z}_5\mathbb{P}^2$ једнак $r=5$, то је свака права инцидентна са $r+1=5+1=6$ тачака.

1.6. Дезаргово тврђење

Фигура је било који скуп тачака и правих пројективне равни, а ако укључимо и релацију инциденције између тачака и правих неке фигуре, добијамо **конфигурацију**. **Геометријска конфигурација** је конфигурација код које је свака права инцидентна са константним бројем тачака а свака тачка инцидентна са константним бројем правих. Ако је константа за број тачака на правој једнака константи за број правих кроз тачку, онда је то **симетрична геометријска конфигурација**.

Низ тачака чине све тачке инцидентне са неком правом, низ тачака инцидентних са правом p обележавамо са (p) и кажемо да је права p носилац низа (p).

Дуална фигура је прамен правих кога чине све праве инцидентне са неком тачком. Прамен правих инцидентних са тачком A обележавамо са (A) и кажемо да је тачка A носилац прамена (A).

Фигура која се састоји од n тачака међу којима нема три колинеарне и свих $\binom{n}{2}$ спојница њима одређеним зове се (потпуни) n-теменик.

Фигура која се састоји од n правих међу којима нема три конкурентне и свих $\binom{n}{2}$ сечишта њима одређеним зове се (потпуни) n-страник.

Тачке ових фигура зовемо темена, док праве зовемо странице.

n-теменик и n-страник су једнаки само у случају $n=3$.

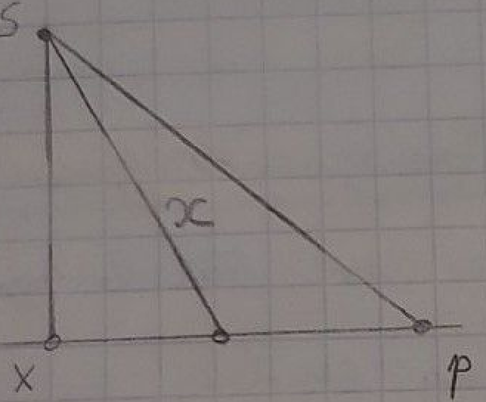
n-теменик за $n=3$ се зове тротеменик, за $n=4$ четворотеменик, за $n=5$ петотеменик и за $n=6$ шестотеменик (дуалне фигуре су тространик, четвороространик, петостраник, шестостраник)

Прост n-теменик је фигура $T_1 T_2 \dots T_n$ која се састоји од n тачака $T_1, T_2, \dots, T_n$ датих у одређеном цикличном редоследу тако да сваке три узастопне нису колинеарне и од n правих $T_1 \vee T_2$, $T_2 \vee T_3$, $\dots$, $T_n \vee T_1$ које су спојнице узастопних тачака

Дуална фигура је **прост n-страник** и он је исто што и прост n-теменик.

За две странице простог n-страника које су инцидентне са истим теменом кажемо да су **суседне**, као и за два темена простог n-теменика која су инцидентна са истом страницом. За два темена T_i и T_j простог $2n$-теменика $T_1 T_2 \dots T_{2n}$ кажемо да су **наспрамна** ако је $|i-j|=n$.

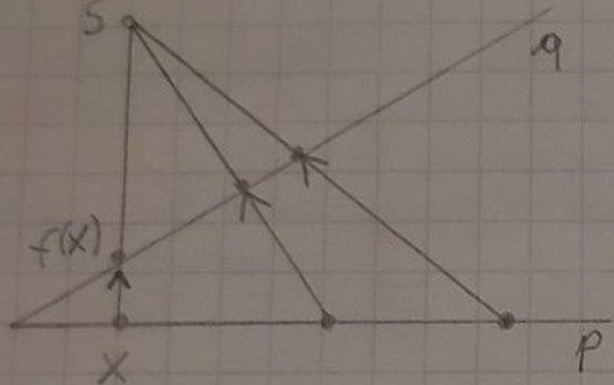
Деф Нека $s \in T$ није инцидентно са $p \in P$. **Перспективитет $(p) \overset{=}{\wedge} (s)$** је пресликавање $f:(p) \to (s)$ дато са $f(x) = s \vee x$. **Перспективитет $(s) \overset{=}{\wedge} (p)$** је пресликавање $f:(s) \to (p)$ дато са $f(x) = p \wedge x$



Перспективитети су основна пресликавања пројективне геометрије и радићемо са њиховим композицијама (домен прве тј. леве пресликавања се мора преклопити са кодоменом друге тј. десне). Тако добијамо пресликавање код кога су и домен и кодомен истог типа (низ тачака или прамен правих) које исто зовемо перспективитет али наводимо у односу на шта је оно перспективитет.

Деф Нека $S \in \mathcal{T}$ није инцидентно са $p, q \in \mathcal{P}$. **Перспективитет**
$(p) \overset{S}{\overline{\overline{\wedge}}} (q)$ је пресликавање $f : (p) \to (q)$ дато са $f(X) = (S \vee X) \wedge q$.

Тачка S се зове **центар перспективе**.

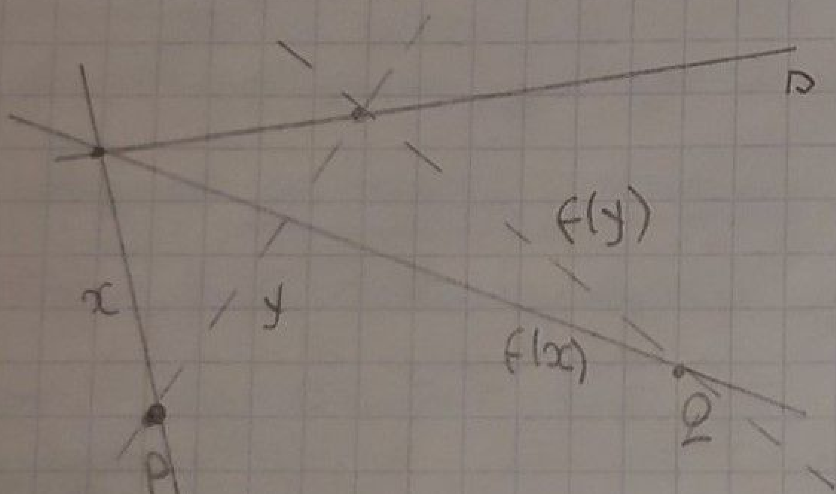


$$(p) \overset{S}{\overline{\overline{\wedge}}} (q) = \left((S) \overline{\overline{\wedge}} (q)\right) \circ \left((p) \overline{\overline{\wedge}} (S)\right)$$

Тачке $X, f(X)$ и S су колинеарне.

$(p) \overset{S}{\overline{\overline{\wedge}}} (q)$ је перспективитет низа (p) на низ (q) у односу на тачку S.

Деф Нека $s \in \mathcal{P}$ није инцидентно са $P, Q \in \mathcal{T}$. **Перспективитет**
$(P) \overset{s}{\overline{\overline{\wedge}}} (Q)$ је пресликавање $f : (P) \to (Q)$ дато са $f(x) = (s \wedge x) \vee Q$.



$$(P) \overset{s}{\overline{\overline{\wedge}}} (Q) = \left((s) \overline{\overline{\wedge}} (Q)\right) \circ \left((P) \overline{\overline{\wedge}} (s)\right)$$

Права s се зове **оса перспективе**

Праве $x, f(x)$ и s су конкурентне

$(P) \overset{s}{\overline{\overline{\wedge}}} (Q)$ је перспективитет прамена (P) на прамен (Q) у односу на праву s.

За две фигуре кажемо да су <u>перспективне у односу на тачку (центар) S</u> ако постоји бијективно пресликовање такво да су сваке две одговарајуће тачке заједно са S колинеарне.

За две фигуре кажемо да су <u>перспективне у односу на праву (осу) s</u> ако постоји бијективно пресликовање такво да су сваке две одговарајуће праве заједно са s конкурентне.

<u>Дезаргово тврђење</u> Ако су два тротеменика перспективна у односу на неку тачку, онда су они перспективни у односу на неку праву.

У расписаном облику ово тврђење гласи:

Ако су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ такви да су праве $A_1 \vee A_2$, $B_1 \vee B_2$, $C_1 \vee C_2$ конкурентне, тада су тачке $(A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$, $(A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$ и $(B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$ колинеарне.

Деф Дезаргова раван је пројективна раван у којој важи Дезаргово тврђење.

Фанова раван нема довољно тачака па у којој Дезаргово тврђење тривијално важи.

→ Конфигурација Дезарговог тврђења се састоји од 10 тачака и 10 правих, свака права је инцидентна са три тачке и свака тачка је инцидентна са три праве. Дуал му је:

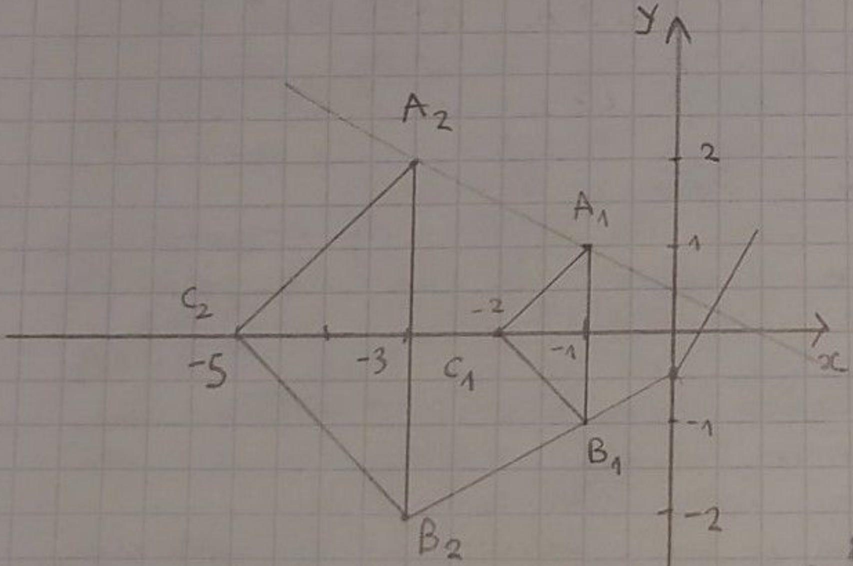
Обрнуто Дезаргово тврђење Ако су два тространика перспективна у односу на неку праву, онда су они перспективни у односу на неку тачку.

Теорема 1.12 У Дезарговој равни важи Обрнуто Дезаргово тврђење.

Теорема 1.13. У Дезарговој равни важи Принцип дуалности.

Постоје пројективне равни које нису Дезаргове (пример је **Молтонова раван** коју добијамо модификацијом проширене еуклидске равни $\mathbb{E}P^2 = (T_\infty, P_\infty, I_\infty)$, задржаћемо тачке из T_∞ као и праве из P_∞ које су вертикалне $(x=n)$ или имају непозитиван нагиб тј. $y=kx+n$ за $k\le 0$, а за праве из P_∞ са позитивним нагибом ($y=kx+n$, за $k>0$) задржаћемо стандардну инциденцију само на њеном делу где је $x\le 0$ и за њену бесконачно далеку тачку, док ћемо за $x>0$ удвостручити нагиб. Нове праве су тада изломљене линије описане једначином

$$y = \begin{cases} kx+n, & x\le 0 \\ 2kx+n, & x>0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{ за } k>0$$



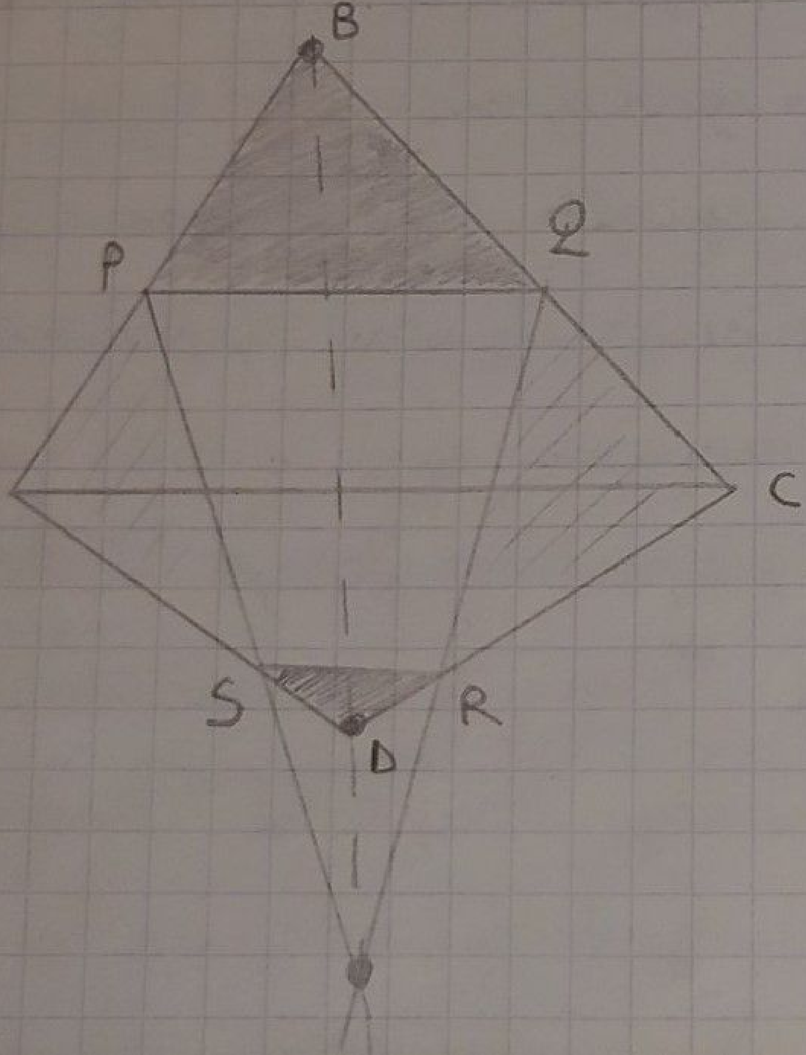
$A_1(-1,1)$, $A_2(-3,2)$
$B_1(-1,-1)$, $B_2(-3,-2)$
$C_1(-2,0)$, $C_2(-5,0)$

$\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$:

$A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$

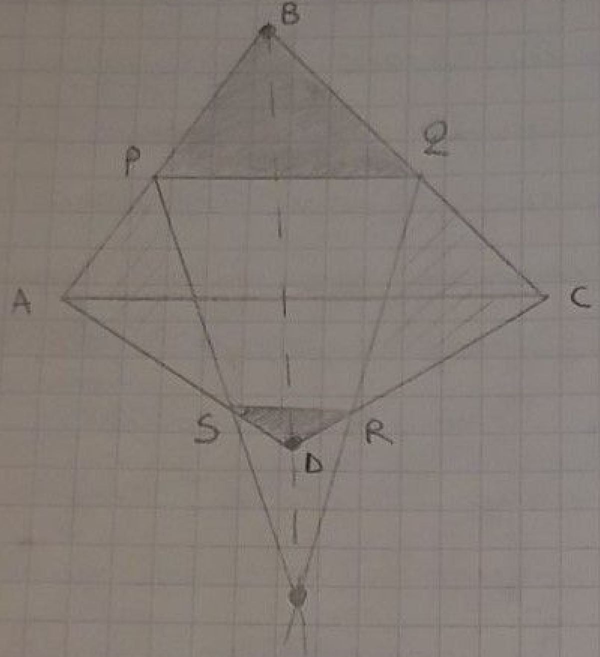
паралелне праве се секу у бесконачним тачкама које припадају бесконачној правој u_∞ па су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективни у односу на осу u_∞, али нису перспективни у односу на неки центар јер праве A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 нису конкурентне
$\Rightarrow$ не важи Обрнуто Дезаргово тврђење па Молтонова раван није Дезаргова.

3.1. У произвољан четвороугао уписан је трапез чије су основе паралелне једној дијагонали четвороугла. Доказати да се краци трапеза секу на другој дијагонали четвороугла.



Нека је ABCD произвољан четвороугао и нека су P, Q, R и S тачке на AB, BC, CD и DA такве да су праве AC, PQ и SR паралелне

(*)



Нека је ABCD произвољан четвороугао и нека су P, Q, R и S тачке на AB, BC, CD и DA такве да су праве AC, PQ и SR паралелне

I НАЧИН (примена Дезарговог тврђења)

Посматрајмо троуглове APS и CQR и приметимо да одговарајућа темена одређују праве AC, PQ и SR које су по претпоставци задатка међусобно паралелне па све садрже бесконачно далеку тачку правих паралелних са AC, тј. троуглови APS и CQR су перспективни у односу на ту бесконачну тачку па на основу Дезарговог тврђења можемо закључити да су троуглови APS и CQR перспективни у односу на осу, тј. одговарајуће тачке $B = AP \wedge CQ$, $D = AS \wedge CR$ и пресечна тачка крака трапеза $PS \wedge QR$ су колинеарне што значи да се краци трапеза PS и QR секу на дијагонали четвороугла BD што је и требало доказати.

I НАЧИН (примена Дезарговог тврђења)

Посматрајмо троуглове APS и CQR и приметимо да одговарајућа темена одређују праве AC, PQ и SR које су по претпоставци задатка међусобно паралелне па све садрже бесконачно далеку тачку правих паралелних са AC, тј. троуглови APS и CQR су перспективни у односу на ту бесконачну тачку па на основу Дезарговог тврђења можемо закључити да су троуглови APS и CQR перспективни у односу на осу, тј. одговарајуће тачке $B = AP \wedge CQ$, $D = AS \wedge CR$ и пресечна тачка крака трапеза $PS \wedge QR$ су колинеарне што значи да се краци трапеза PS и QR секу на дијагонали четвороугла BD што је и требало доказати.

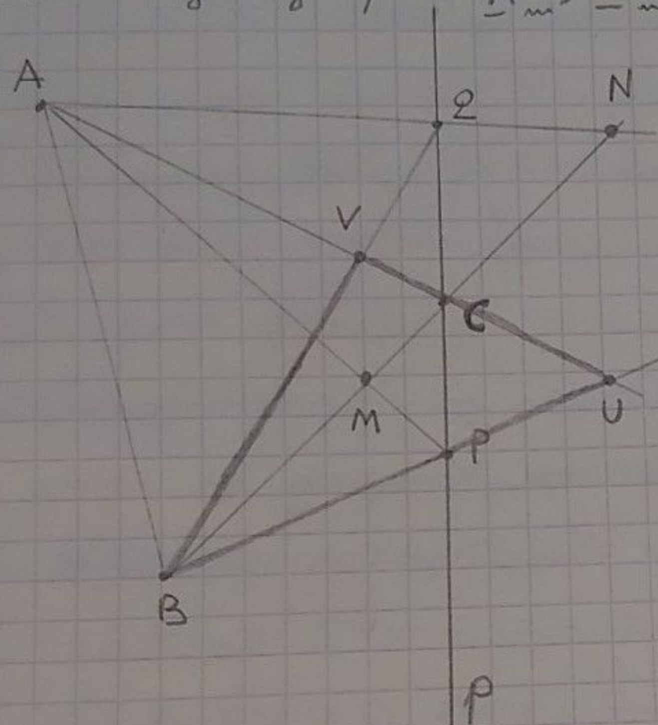
II НАЧИН (примена Обрнутог Дезарговог тврђења)

Посматрајмо троуглове PBQ и SDR и приметимо да су одговарајући пресеци одговарајућих правих $PB \wedge SD = A$,

$BQ \wedge DR = C$ и $PQ \wedge SR$. Како важи $AC \parallel PQ \parallel SR$ то је $PQ \wedge SR$ бесконачно далека тачка правих паралелних са AC, па је она уједно и на AC, тј. тачке A, C и $PQ \wedge SR$ су колинеарне па су троуглови PBQ и SDR перспективни у односу на осу, а на основу Обрнутог Дезарговог тврђења биће перспективни и у односу на тачку тј. праве PS, BD и QR су конкурентне тј. краци трапеза PS и QR се секу на дијагонали четвороугла BD што се и тражило.

3.3. Дате су неколинеарне тачке A, B, C и права $p \ni C$. Нека су P и Q произвољне тачке са p и нека важи
$$M = AP \wedge BC,\quad N = AQ \wedge BC,\quad U = BP \wedge AC,\quad V = BQ \wedge AC.$$
Доказати да су праве AB, MU, NV конкурентне.

(*)



Посматрајмо троуглове AMN и BUV и пресеке одговарајућих правих $AM \wedge BU = P$, $AN \wedge BV = Q$ и $MN \wedge UV = C$. Како су све три тачке P, Q и C на правој p, то је права p оса перспективе троуглова AMN и BUV па су они перспективни у односу на осу, одакле применом обрнутог Дезарговог тврђења закључујемо да су они перспективни у односу на тачку, тј. одговарајуће праве AB, MU и NV су конкурентне што је и требало доказати.