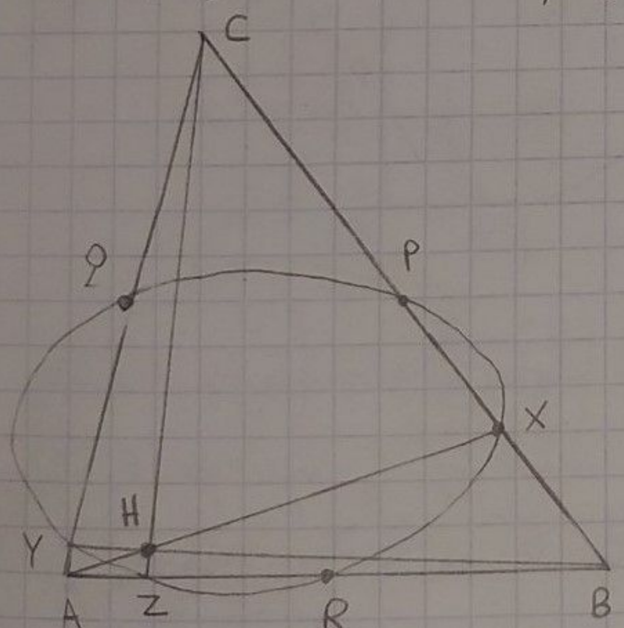
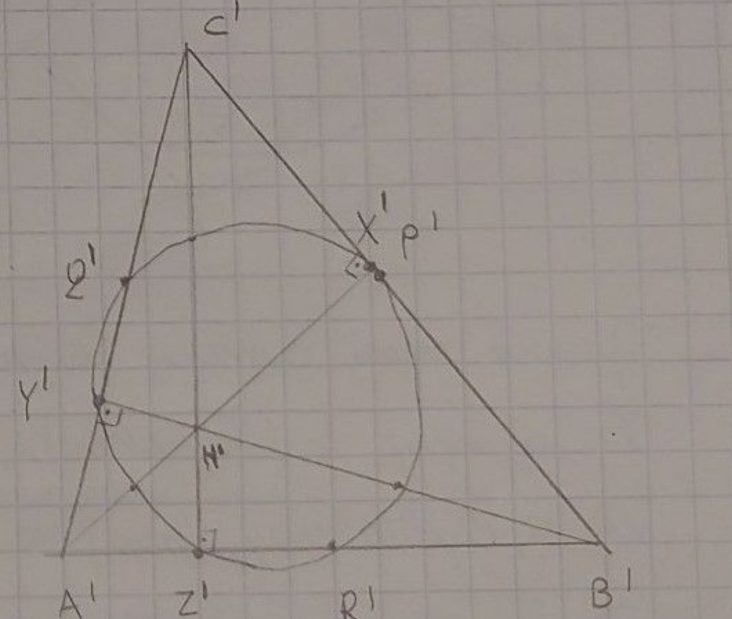
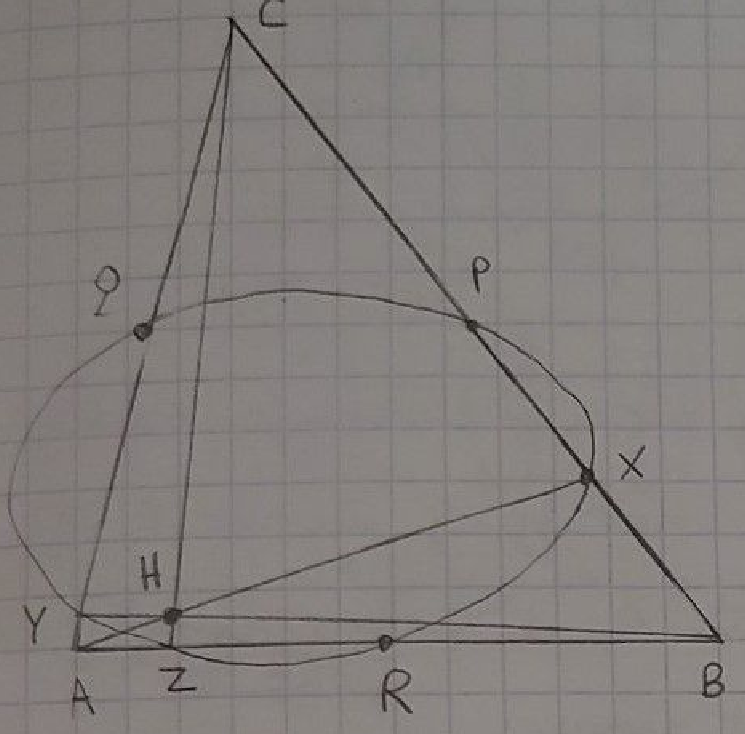
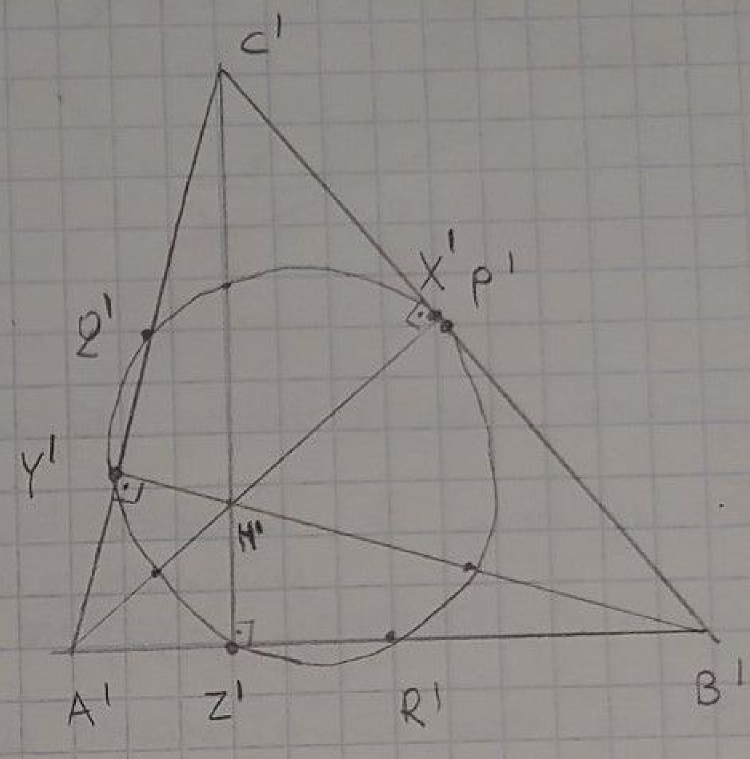
(29.) Нека је Π елипса која садржи средишта P, Q, R страница BC, CA, AB неког троугла ABC равни $\mathbb{E}^2$. Ако она праве BC, CA, AB, тим редом, сече у тачкама X, Y, Z доказати да се праве AX, BY, CZ секу у једној тачки, нпр. H и важи: $HS : ST = 3:1$ (S - центар елипсе, T - тежиште троугла ABC).

(*) Идеја је да уочимо неку афину трансформацију која ће елипсу да пресликa у круг (на основу задатка (28) знамо да постоји дилатација која то ради). Како афина пресликавања чувају барицентре и однос дељења дужи, то се средишта дужи сликају у средишта дужи, тежиште троугла T се слика у тежиште T' новог троугла и центар елипсе S се слика у центар круга S'.





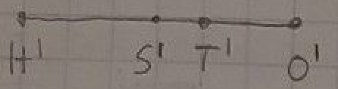




Зато се посматрана елипса слика у Ојлеров круг троугла $A'B'C'$ јер тај круг садржи средишта P', Q' и R' страница $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$. Тај круг сече странице троугла $A'B'C'$ у тачкама X', Y' и Z' које представљају подножја висина у троуглу $A'B'C'$ из темена A', B' и C' (јер Ојлеров круг 9 тачака садржи средишта страница троугла, подножја висина и средишта дужи $A'H'$, $B'H'$ и $C'H'$). Дужи $A'X'$, $B'Y'$, $C'Z'$ се секу у ортоцентру H' троугла

A'B'C' и на основу познатог својства из Геометрије 2 важи $H'S' : S'T' = 3:1$ одакле закључујемо да $HS : ST = 3:1$.

подсетник: Ојлерова права



$S' = S(H'O')$, O' - центар описаног круга троугла $A'B'C'$.

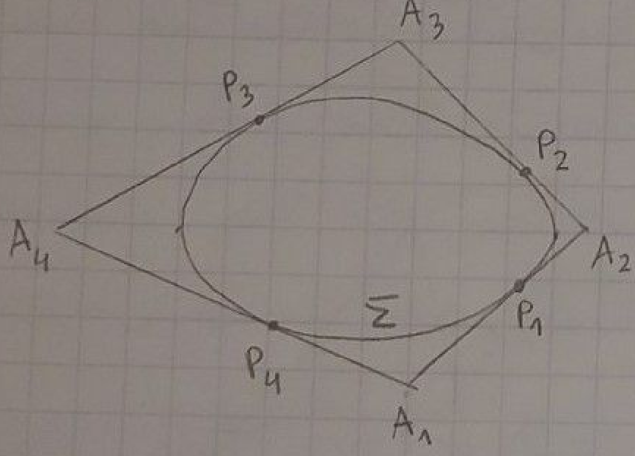
$H'T' : T'O' = 2:1$

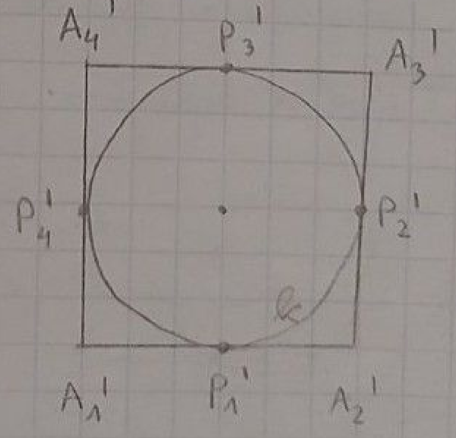
$$\left.\begin{aligned} H'S' &= \tfrac{1}{2} H'O' \\ H'T' &= \tfrac{2}{3} H'O' \\ S'T' &= \tfrac{1}{6} H'O' \end{aligned}\right\} \Rightarrow H'S' : S'T' = \frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 3:1$$

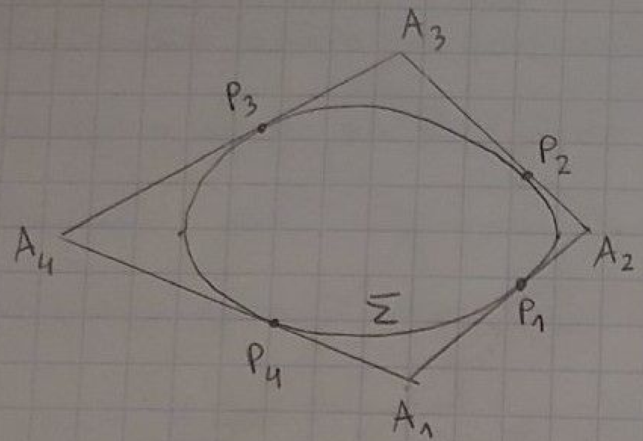
30. Ако је елипса Σ уписана у полигон $A_1, A_2, \dots, A_n$ доказати да за додирне тачке P_r страница $A_r A_{r+1}$ важи

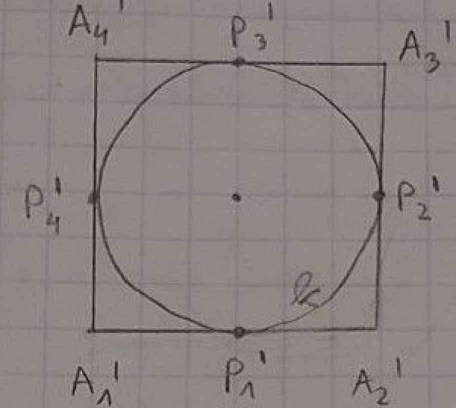
$$\|\overrightarrow{A_1P_1}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2P_2}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{A_nP_n}\| = \|\overrightarrow{P_1A_2}\| \cdot \|\overrightarrow{P_2A_3}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{P_nA_1}\|$$

* На слици је приказан случај $n=4$.









Уочимо неку афину трансформацију која пресликава елипсу Σ у круг k. Тачке $P_1, P_2, \dots, P_n$ се сликају у тачке $P_1', P_2', \dots, P_n'$ које представљају додирне тачке круга k и полигона $A_1'A_2'\dots A_n'$ па су као тангентне дужи једнаке дужи:

$$\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\| = \|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|$$
$$\|\overrightarrow{A_2'P_2'}\| = \|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|$$
$$\|\overrightarrow{A_3'P_3'}\| = \|\overrightarrow{P_2'A_3'}\|$$
$$\vdots$$
$$\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\| = \|\overrightarrow{P_{n-1}'A_n'}\|.$$

$$\Rightarrow \quad \|\overrightarrow{A_1'P_1'}\|\,\|\overrightarrow{A_2'P_2'}\|\cdot\ldots\cdot\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\| = \|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|\cdot\|\overrightarrow{P_2'A_3'}\|\cdot\ldots\cdot\|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|$$

$$\frac{\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\|}{\|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|}\cdot\frac{\|\overrightarrow{A_2'P_2'}\|}{\|\overrightarrow{P_2'A_3'}\|}\cdot\ldots\cdot\frac{\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\|}{\|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|} = 1$$

Како афине трансформације чувају однос дељења „колинеарних" дужи, имамо да је:

$$\frac{\|\overrightarrow{A_1P_1}\|}{\|\overrightarrow{P_1A_2}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\|}{\|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{A_2P_2}\|}{\|\overrightarrow{P_2A_3}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_2'P_2'}\|}{\|\overrightarrow{P_2'A_3'}\|}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\|\overrightarrow{A_nP_n}\|}{\|\overrightarrow{P_nA_1}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\|}{\|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\overrightarrow{A_1P_1}\|}{\|\overrightarrow{P_1A_2}\|} \cdot \ldots \cdot \frac{\|\overrightarrow{A_nP_n}\|}{\|\overrightarrow{P_nA_1}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\|}{\|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|} \cdot \ldots \cdot \frac{\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\|}{\|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\|\overrightarrow{A_1P_1}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2P_2}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{A_nP_n}\| = \|\overrightarrow{P_1A_2}\| \cdot \|\overrightarrow{P_2A_3}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{P_nA_1}\|$$

што се и тражило.

31. Нека је $\mathcal{X}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ хипербола и $P \in \mathcal{X}$ произвољна тачка. Доказати да постоји афино пресликавање којим се хипербола $\mathcal{X}$ слика на хиперболу $\mathcal{X}': x'y' = 1$ при коме се тачка P слика у тачку $P'(1,1)$.

$\circledast$ $\mathcal{X}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\underbrace{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)}_{x_1'} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}_{y_1'} = 1$$

$$x_1' = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

$$y_1' = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x_1' y_1' = 1$ и тај производ не смемо мењати

$$x' = c x_1'$$

$$y' = \frac{1}{c} y_1'$$

Константу $c \neq 0$ бирамо тако да се произвољна тачка $P(x_0, y_0) \in \mathcal{X}$ слика у тачку $P'(1,1)$.

$$x' = c \cdot x_1' \Rightarrow 1 = c \cdot \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \Rightarrow c = \frac{1}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}$$

Тада је и $1 = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right)$ (из $y' = \frac{1}{c} y_1'$) тј.

$c = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = \frac{1}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}$ где последња једнакост важи јер $P(x_0, y_0) \in \mathcal{X}$

па је $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ тј. $\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = \frac{1}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}$

Дакле, једно афино пресликавање које пресликава дату хиперболу χ у χ' и тачку $P(x_0, y_0)$ у тачку $P'(1,1)$ је:

$$x' = \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

$$y' = \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

32. У $\mathbb{R}^4$ одредити праву l такву да $M \in l$ где $M(0,1,2,3)$ и $l \perp p$ где је p: $\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 - 2}{1} = \frac{x_3 - 3}{2} = \frac{x_4 - 4}{1}$ и $l \cap q \neq \emptyset$ где је права q: $\frac{x_1 + 1}{3} = \frac{x_2 + 1}{2} = \frac{x_3 + 3}{1} = \frac{x_4 - 7}{0}$ и $\measuredangle(l, r) = \arccos\frac{1}{6}$ где је права r: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

(*) Ако $l \cap q \neq \emptyset$ то на правој l постоји тачка Q која је и на правој q: $\frac{x_1+1}{3} = \frac{x_2+1}{2} = \frac{x_3+3}{1} = \frac{x_4-7}{0} = s$ тј. $Q(-1+3s, -1+2s, -3+s, 7)$

Права l има вектор правца $\overrightarrow{MQ}$ па због $l \perp p$ мора бити $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{p}$

$\overrightarrow{MQ}(-1+3s, -2+2s, -5+s, 4)$, $\vec{p} = (2,1,2,1)$ па s налазимо из $\overrightarrow{MQ} \cdot \vec{p} = 0$ тј. $2(-1+3s) + 1\cdot(-2+2s) + 2(-5+s) + 1\cdot 4 = 0$

$$-2+6s-2+2s-10+2s+4=0$$

$$10s=10$$

$$s=1 \quad \Rightarrow \quad Q(2,1,-2,7)$$

$\overrightarrow{MQ}(2,0,-4,4)$

$r: x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \Rightarrow \vec{r} = (1,1,1,1)$

$$\cos\angle(l,r) = \frac{\langle \overrightarrow{MQ}, \vec{r} \rangle}{\|\overrightarrow{MQ}\| \, \|\vec{r}\|} = \frac{(2,0,-4,4)\cdot(1,1,1,1)}{\sqrt{2^2+16+16}\cdot\sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{36}\cdot 2} = \frac{1}{6}$$

па права l задовољава и услов $\angle(l,r) = \arccos\frac{1}{6}$.

Дакле, тражена права која задовољава обе услове је:

$$l: \frac{x_1}{1} = \frac{x_2-1}{0} = \frac{x_3-2}{-2} = \frac{x_4-3}{2}.$$

ЕУКЛИДСКА ГЕОМЕТРИЈА

Изометрије равни $(n=2)$

$f: \; y = Ax + b$ је изометрија равни $\Leftrightarrow AA^T = E$

изометрија	скуп фиксних тачака	сопствене вредности
коинциденција транслација	$\mathbb{R}^2$ $\emptyset$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
осна рефлексија клизајућа рефлексија	права $\emptyset$ (фиксна је права, али не тачка по тачка)	$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$
ротација централна симетрија	тачка	нема $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

(33.) Нека је пресликавање f дато помоћу формуле

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Доказати да је пресликавање f изометрија, одредити основне компоненте те изометрије и скицирати пут једне тачке.

(✱)

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Како је $AA^T = E$ то пресликавање је изометрија.

Да бисмо одредили која је изометрија у питању налазимо сопствене вредности матрице A.

$\det(A-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{5}-\lambda & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{5}-\lambda\right)^2+\frac{16}{25}>0$$

$\Rightarrow$ Матрица A нема сопствене вредности па је изометрија f ротација.

Центар те ротације налазимо као фиксну тачку изометрије f

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+4 \quad /\cdot 5 \\ y &= \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2 \quad /\cdot 5 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 5x &= 3x-4y+20 \\ 5y &= 4x+3y-10 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 2x+4y &= 20 \\ 4x-2y &= 10 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$x+2y=10 \Rightarrow x=10-2y$

$2x-y=5$

$2(10-2y)-y=5$

$20-4y-y=5$

Једина фиксна тачка је $S(4,3)$ и то је центар ротације.

$$\vec{f} = A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

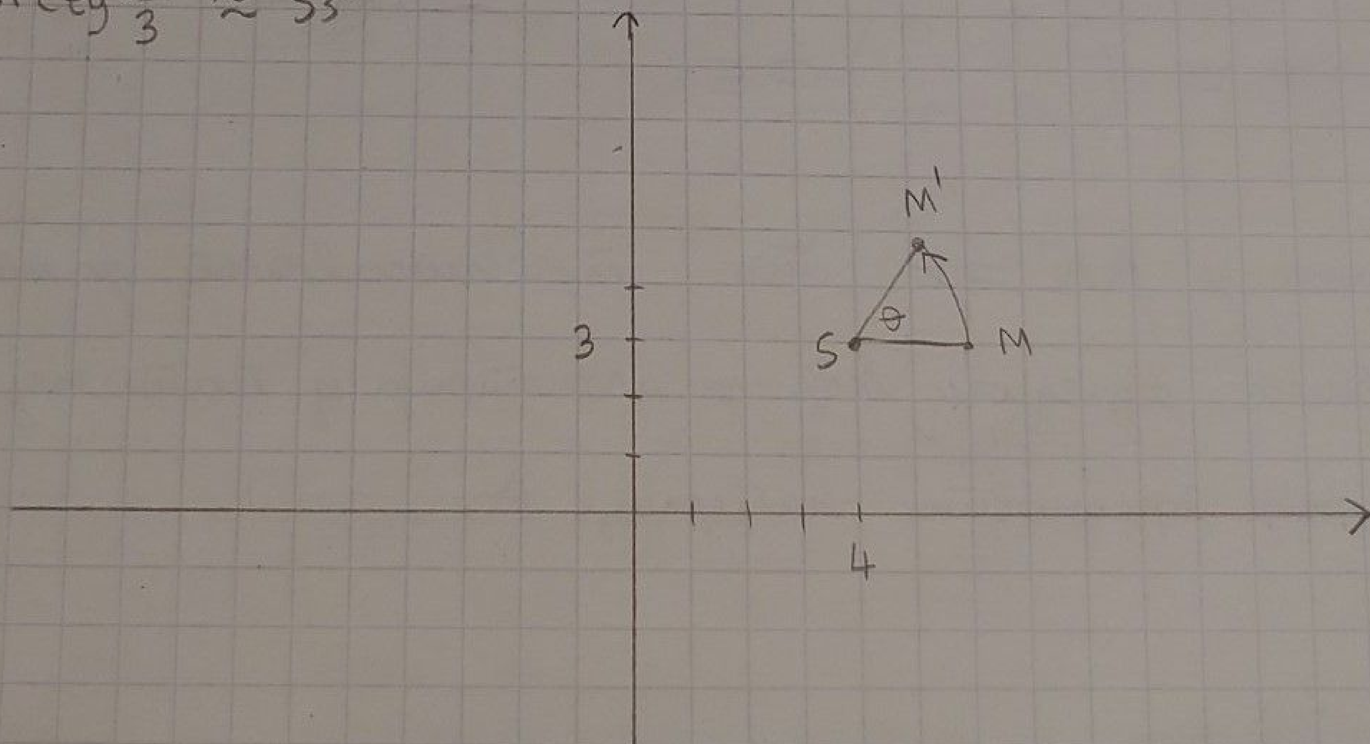
матрица ротације за угао θ око центра ротације супротно од кретања казаљке на сату

$$5y = 15 \Rightarrow y = 3$$
$$x = 10 - 2y$$
$$x = 10 - 2 \cdot 3$$
$$x = 10 - 6$$
$$x = 4$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$
$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 53^\circ$$



34. Трансформација равни је дата формулама $x' = 1-y$ и $y' = 2-x$. Доказати да је ова трансформација изометрија, одредити њене компоненте и скицирати путању тачке.

(*)

$$x' = -y+1 \qquad\qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y' = -x+2$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$\Rightarrow$ Дата трансформација јесте изометрија равни.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ $\Rightarrow$ у питању је осна или клизајућа рефлексија што ћемо утврдити на основу фиксних тачака

$$x = 1 - y \qquad \Rightarrow \qquad x + y = 1$$
$$y = 2 - x \qquad\qquad\quad x + y = 2$$

$\Rightarrow$ нема фиксних тачака па је у питању клизајућа рефлексија

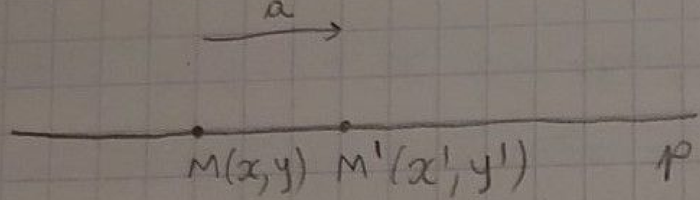
Вектор правца осе рефлексије p и вектор транслације су паралелни сопственом вектору за $\lambda = 1$.

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$-v = u$$
$$-u = v$$

$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ је сопствени вектор



$$a = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Једначину праве p добијамо из услова $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{f_1}$

$$MM'(1-y-x,\ 2-x-y) \parallel (1,-1)$$

$$\frac{1-x-y}{1} = \frac{2-x-y}{-1}$$

$$x+y-1 = 2-x-y$$

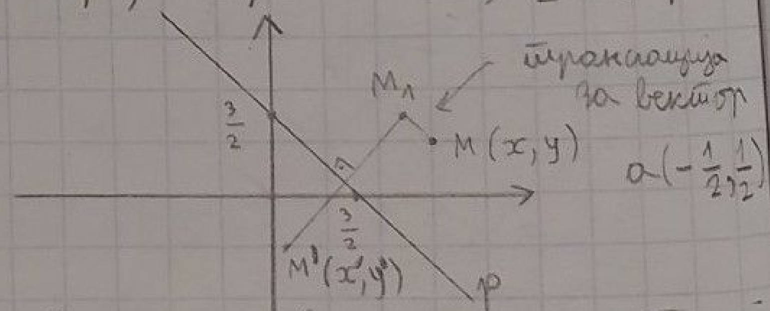
$$p:\ 2x+2y-3=0$$

x	0	$\frac{3}{2}$
y	$\frac{3}{2}$	0

Да бисмо добили како изгледа вектор транслације довољно је да пресликамо једну тачку са праве p, нпр. $P\left(0, \frac{3}{2}\right) \in p$

$$P'\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$a = \overrightarrow{PP'} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



Напомена: Да је скуп фиксних тачака била права, изометрија би била осна рефлексија и то у односу на ту праву.

35. Одредити у координатама формуле клизајуће рефлексије ако је оса права $y = x$ а вектор $\vec{a} = (3,3)$.

⊛ T – транслација за вектор $\vec{a} = (3,3)$ $\quad (\vec{a} \parallel (1,1))$

$$T: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

S_p – осна рефлексија у односу на праву $p: y = x$

$$S_p: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$G_{p,\vec{a}}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= y + 3 \\ y'' &= x + 3 \end{aligned}\right\} \leftarrow$$ тражене формуле клизајуће рефлексије

Изометрије простора $(n=3)$ $f: y = Ax + b$

Пресликавање f је изометрија простора $\iff AA^T = E$

изометрија	фиксне тачке	сопствене вредности
коинциденција	$\mathbb{R}^3$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
транслација	$\emptyset$	
раванска рефлексија	раван	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = -1$
клизајућа рефлексија	$\emptyset$	
осна ротација	права	$\lambda = 1$ само једна сопствена вредност
завојно кретање	$\emptyset$	
централна симетрија	тачка	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$
ротациона рефлексија		$\lambda = -1$

36. Доказати да је пресликавање задато помоћу $x' = 1 - z$, $y' = -x$ и $z' = y - 2$ изометрија и одредити њене компоненте

(*)

$x' = 1 - z$

$y' = -x$

$z' = y - 2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$\Rightarrow$ Зато пресликавање јесте изометрија.

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

$$= -\lambda \cdot \lambda^2 + 1 = 1 - \lambda^3 = (1-\lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$(\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$

Како је $\lambda = 1$ једина сопствена вредност, дата изометрија је или осна ротација или завојно кретање, што одређујемо на основу скупа фиксних тачака.

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - z \\ y &= -x \\ z &= y - 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = -x = z - 1$$

$$z = z - 1 - 2$$

$$0 = -3 \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ Скуп фиксних тачака је $\emptyset$.

$\Rightarrow$ Дата изометрија је завојно кретање.

Његове компоненте су оса ротације, угао ротације и вектор транслације.

Вектор правца осе ротације и вектор транслације су паралелни са сопственим вектором који одговара сопственој вредности $\lambda = 1$.

$$A\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

$-w = u \qquad u = -w$

$-u = v \qquad v = -u = w$

$v = w$

нпр. $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

Осу ротације добијамо из услова $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{f}_1$, $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$

$\overrightarrow{MM'}(1-x-z, -x-y, y-z-2) \parallel (-1,1,1)$

$$\frac{1-x-z}{-1} = \frac{-x-y}{1} = \frac{y-z-2}{1}$$

$$\left.\begin{aligned}1-x-z &= x+y\\ y-z-2 &= -x-y\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}2x+y+z-1 &= 0\\ x+2y-z-2 &= 0\end{aligned}\right\} \leftarrow \text{једначина праве у тродимензионом простору}$$

Вектор транслације добијамо тако што пресликамо једну тачку са осе праве нпр. $P(0,1,0)$

$P'(1-0, -0, 1-2)$

$P'(1, 0, -1)$

$a = \overrightarrow{PP'} = (1, -1, -1)$ и то је вектор транслације

Остало је још да одредимо угао ротације.

Променићемо базу тако да $\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$ буде један од базних вектора

$\vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ ← бирамо било који ортогоналан на $\vec{f_1}$

$$\vec{f_3} = \vec{f_1} \times \vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, -2)$$

У бази $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ матрица A има облик $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = B$

Матрица преласка са базе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ на базу $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ је:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

слика првог базног вектора $\vec{e}_1$ је $\vec{f}_1$ и у прву колону запишемо његово представљање у бази $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$f = e \cdot P, \qquad X = P \cdot Y$$

$$A = PBP^{-1}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

морамо добити овакав облик матрице и одавде добијамо угао ротације θ

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

Угао осне ротације је $\frac{4\pi}{3}$ чиме је задатак у потпуности решен.

Трансформације сличности

f: $x' = Ax + b$ је трансформација сличности ако је $AA^T = k^2 E$

f је тада сличност са коефицијентом $k > 0$

Ако сличност није изометрија онда има тачно једну фиксну тачку.

Ако узмемо $k > 0$ такво да је $AA^T = k^2 E$ онда је јединствена декомпозиција сличности на хомотетију $\mathcal{X}_{S,k}$ и изометрију $\tilde{f}$ где је S јединствена фиксна тачка сличности f.

37. Дата је трансформација f помоћу $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Доказати да је то сличност, наћи њене компоненте и скицирати путању тачке.

$\circledast$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} = 13E$$

$k^2 = 13 \implies k = \sqrt{13}$ јер узимамо $k > 0$

$\implies$ Дата трансформација је сличности.

Центар хомотетије $\mathcal{H}_{S,k}$ која учествује у разлагању ове сличности тражимо као фиксну тачку сличности f.

$x = 2x - 3y + 1 \qquad x - 3y + 1 = 0$

$y = 3x + 2y - 2 \qquad 3x + y - 2 = 0 \quad / \cdot 3 \qquad 9x + 3y - 6 = 0$

$\oplus$

$10x - 5 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{3}(x+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 1\right)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Центар хомотетије је тачка $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Остало је да нађемо изометрију $\tilde{f}$ за коју знамо да има бар једну фиксну тачку

$[f] = kE\,[\tilde{f}]$ јер $f = \chi_{S,k} \circ \tilde{f}$

$[\tilde{f}] = \frac{1}{k}\,[f] \overset{A}{=} \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\det[\tilde{f}] = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{13} \cdot (4+9) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ је директна изометрија равни која има бар једну фиксну тачку

$$[\tilde{f}] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Ово је матрица ротације за неки угао θ па је $\tilde{f}$ ротација око тачке S за угао θ

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{3}{2} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ θ је између $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$