19. Ако су A и B две разне тачке простора $\mathcal{A}$ и α, β фиксирани скалари, тада је пресликавање $\pi: M \mapsto \alpha A + \beta B + (1-\alpha-\beta) M$ или транслација или хомотетија.

(*) Нађимо фиксне тачке пресликавања π тј. тачке S такве да је $\pi(S) = S$, ако такве постоје.

$$\alpha A + \beta B + (1-\alpha-\beta) S = S$$

$$\alpha \overrightarrow{SA} + \beta \overrightarrow{SB} = 0$$

Разликујемо два случаја:

1) Ако је $\alpha + \beta \neq 0$ онда $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{SA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{SB} = 0$ па је S барицентар за (A,α) и (B,β)

$$\pi(M) = \alpha A + \beta B + (1-\alpha-\beta) M = M' \quad (\star)$$

$$\pi(S + \overrightarrow{SM}) = S + \overrightarrow{SM'} = \pi(S) + \overrightarrow{SM'}$$ где је S фиксна тачка

$$\vec{\pi}(\overrightarrow{SM}) = \overrightarrow{SM'} = \underbrace{\alpha \overrightarrow{SA} + \beta \overrightarrow{SB}}_{=0 \text{ јер је } S \text{ фиксна тачка}} + (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{SM} = (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{SM}$$

M' је из $(\star)$ барицентар система тежинских тачака

$$(A,\alpha), (B,\beta), (M, 1-\alpha-\beta)$$

$$\vec{\pi} = (1-\alpha-\beta)\,\mathrm{Id}$$

$\Rightarrow \pi = \chi_{S,1-\alpha-\beta}$ тј. дато пресликавање је хомотетија са центром S и коефицијентом $1-\alpha-\beta$

2) Ако је $\alpha+\beta=0$ онда $M' = -\beta A + \beta B + M$ тј. тачка M' је

бариценатар система тежинских тачака $(A,-\beta)$, (B,β) и $(M,1)$

$$\overrightarrow{MM'} = -\beta\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + 1\cdot\underbrace{\overrightarrow{MM}}_{\vec{0}} = \beta(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = \beta\cdot\overrightarrow{AB}$$

Како је $\Pi(M) = M'$ и $\overrightarrow{MM'} = \beta\cdot\overrightarrow{AB}$ па је $\overrightarrow{MM'}$ константно онда је

пресликавање $\Pi = T_{\beta\cdot\overrightarrow{AB}}$ транслација за вектор $\beta\cdot\overrightarrow{AB}$.

1.6. Афини репер

Теорема 1.3. Ако је E афини простор димензије n и $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ афини репер за E, тада за произвољни афини простор E' и било коју фамилију $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ тачака из E', постоји јединствено афино пресликавање $f: E \to E'$ такво да је

$f(A_i) = B_i$ за $0 \le i \le n$.

1.7. Афина група

Скуп свих линеарних трансформација на неком векторском простору $\vec{E}$ чини линеарну групу $GL(\vec{E})$. У афиној геометрији посматрамо скуп свих бијективних афиних пресликавања $f: E \to E$ који обележавамо са $GA(E)$ и зовемо афина група. Транслације су пресликавања $T_u \in GA(E)$ за $u \in \vec{E}$ дефинисана са $T_u(A) = A + u$ и тада је $u = \overrightarrow{A\,T_u(A)} = \overrightarrow{B\,T_u(B)}$.
Скуп свих транслација $T(E)$ је подгрупа афине групе $GA(E)$ где је неутрал транслација за нула вектор $T_0 = Id$.

Теорема 1.4. За произвољно $P \in E$, свако $f \in GA(E)$ се на јединствен начин раставља на $f = T_u \circ g$ где је $T_u \in T(E)$ а $g \in GA(E)$ таква да је $g(P) = P$

Теорема 1.5. Ако је $\Phi_f = \{x \in E;\ f(x) = x\} \neq \emptyset$ онда је Φ_f афини потпростор са директрисом $\ker(\vec{f} - Id_{\vec{E}})$. Ако је $\Phi_f = \emptyset$ онда је $\dim \ker(\vec{f} - Id_{\vec{E}}) \geq 1$.

Пресликавање одређено са $\chi_{S,\lambda}(x) = S + \lambda \overrightarrow{Sx}$ зовемо хомотетија са центром S и коефицијентом λ, где $\lambda \notin \{0,1\}$.

20. Ако су η и δ хомотетије са средиштима P и Q и коефицијентима α и β, њихова композиција је или транслација (за $\alpha\beta = 1$) или хомотетија (за $\alpha\beta \neq 1$). У првом случају то је транслација за вектор $a = (1-\alpha)\overrightarrow{QP}$, а у другом хомотетија чије је средиште R одређено са

$$\overrightarrow{QR} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{QP}$$

⊛
$$\chi_{P,\alpha} \circ \chi_{Q,\beta}(X) = \chi_{P,\alpha}(Q + \beta \cdot \overrightarrow{QX}) = \chi_{P,\alpha}(Q) + \overrightarrow{\chi}_{P,\alpha}(\beta \cdot \overrightarrow{QX}) =$$

$$= P + \alpha \cdot \overrightarrow{PQ} + \alpha\beta \cdot \overrightarrow{QX} = R + \overrightarrow{RP} + \alpha\overrightarrow{RQ} - \alpha\overrightarrow{RP} + \alpha\beta\overrightarrow{RX} - \alpha\beta\overrightarrow{RQ} =$$

$$= R + (1-\alpha)\overrightarrow{RP} + \alpha(1-\beta)\overrightarrow{RQ} + \alpha\beta\overrightarrow{RX}$$ где је R произвољна тачка

У случају да је $\alpha\beta \neq 1$ можемо изабрати барицентар $R = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}P + \frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}Q$ јер је тада $(1-\alpha)\overrightarrow{RP} + \alpha(1-\beta)\overrightarrow{RQ} = 0$ те добијамо да је

$\chi_{P,\alpha}\circ\chi_{Q,\beta}(X) = R + \alpha\beta\overrightarrow{RX} = \chi_{R,\alpha\beta}$. У случају да је $\alpha\beta = 1$ имамо

$$\chi_{P,\alpha}\circ\chi_{Q,\beta}(X) = R + \overrightarrow{RX} + (1-\alpha)\overrightarrow{RP} + (\alpha-1)\overrightarrow{RQ} = X + (1-\alpha)\overrightarrow{QP} = T_{(1-\alpha)\overrightarrow{QP}}$$

Дакле, у случају да је $\alpha\beta = 1$ то је транслација за вектор $a = (1-\alpha)\overrightarrow{QP}$ док је у случају $\alpha\beta \neq 1$ то хомотетија са центром R одређеним са $\overrightarrow{QR} = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{QP}$

21. Доказати да две хомотетије η и δ у афиној групи простора A комутирају ако и само ако имају заједничко средиште хомотетије

(*) $\boxed{\Leftarrow}$

$$\eta\circ\delta(X) = \chi_{S,\beta}\circ\chi_{S,\alpha}(X) = \chi_{S,\beta}(S + \alpha\cdot\overrightarrow{SX}) = S + \beta\,\overrightarrow{S(S+\alpha\overrightarrow{SX})}$$
$$= S + \beta\cdot\alpha\,\overrightarrow{SX}$$

$$\delta\circ\eta(X) = \chi_{S,\alpha}\circ\chi_{S,\beta}(X) = \chi_{S,\alpha}(S + \beta\cdot\overrightarrow{SX}) = S + \alpha\cdot\overrightarrow{S(S+\beta\overrightarrow{SX})} =$$
$$= S + \alpha\beta\,\overrightarrow{SX} = S + \beta\alpha\,\overrightarrow{SX}$$

Овим смо доказали да две хомотетије у афиној групи простора A комутирају ако имају заједничко средиште хомотетије.

$\boxed{\Rightarrow}$ Претпостављамо да за две хомотетије η и δ у афиној групи простора A важи $\eta \circ \delta = \delta \circ \eta$. Доказујемо да те две хомотетије имају заједничко средиште. Нека је $\eta = \chi_{P,\alpha}$ и $\delta = \chi_{Q,\beta}$.

Разликујемо два случаја:

1) $\alpha\beta = 1$

$$\chi_{P,\alpha} \circ \chi_{Q,\beta} = T_{(1-\alpha)\overrightarrow{QP}} \quad \text{и} \quad \chi_{Q,\beta} \circ \chi_{P,\alpha} = T_{(1-\beta)\overrightarrow{PQ}}$$

на основу претходног задатка и важи $\chi_{P,\alpha} \circ \chi_{Q,\beta} = \chi_{Q,\beta} \circ \chi_{P,\alpha}$

акко $T_{(1-\alpha)\overrightarrow{QP}} = T_{(1-\beta)\overrightarrow{PQ}}$ акко $(1-\alpha)\overrightarrow{QP} = (1-\beta)\overrightarrow{PQ}$ акко

$$(2-\alpha-\beta)\overrightarrow{QP} = \vec{0}$$

$\alpha+\beta = 2$

$\alpha\beta = 1$

$\Downarrow$

$\alpha = \beta = 1$

Овај случај није могућ јер смо у дефиницији хомотетије елиминисали могућности да коефицијенти хомотетије буде 0 или 1.

$\overrightarrow{QP} = \vec{0}$

$P = Q$

Преостаје само овај случај и тада се средишта хомотетија η и δ поклапају.

2) $\alpha\beta \neq 1$

$\chi_{P,\alpha} \circ \chi_{Q,\beta} = \chi_{R_1,\alpha\beta}$ где је R_1 такво да $\overrightarrow{QR_1} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{QP}$

$\chi_{Q,\beta} \circ \chi_{P,\alpha} = \chi_{R_2,\beta\alpha}$ где је R_2 такво да $\overrightarrow{PR_2} = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{PQ}$

Ако је $\chi_{P,\alpha} \circ \chi_{Q,\beta} = \chi_{Q,\beta} \circ \chi_{P,\alpha}$ онда $\chi_{R_1,\alpha\beta} = \chi_{R_2,\beta\alpha}$ одакле је

$R_1 = R_2$.

$$\overrightarrow{QR_1} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{QP} = \frac{\alpha-1}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{QR_1} = \overrightarrow{QR_2} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR_2} = -\overrightarrow{PQ} + \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{PQ} = \left(-1 + \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\right)\overrightarrow{PQ} = \frac{\alpha\beta-1+1-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{PQ} =$$

$$= \frac{\alpha\beta-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{PQ} = \frac{\beta(\alpha-1)}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{PQ}$$

$$\frac{\alpha-1}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{PQ} = \frac{\beta(\alpha-1)}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{PQ}$$

$$\frac{\alpha-1}{1-\alpha\beta}(1-\beta)\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$$

$(\alpha-1)(1-\beta) = 0$

$\alpha = 1$ $\quad$ $\beta = 1$

ови бројеви нису могући јер коефицијент хомотетије не може бити једнак 1

$\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$

$P = Q$

Преостаје само овај случај и тада дате хомотетије η и δ имају заједничко средиште.

Овим смо доказали да дате хомотетије имају заједничко средиште.

22. Доказати да је композиција две централне симетрије транслација и одредити њен вектор.

(*) Нека су дате две централне симетрије $\eta = \chi_{P,-1}$ и $\delta = \chi_{Q,-1}$

Тада је $(-1)\cdot(-1) = 1$ па је $\chi_{P,-1} \circ \chi_{Q,-1} = \tau_{(1-(-1))\overrightarrow{QP}} = \tau_{2\overrightarrow{QP}}$

на основу претходног задатка, односно композиција две централне симетрије је транслација за вектор $2\overrightarrow{QP}$.

23. Ако је η хомотетија са средиштем P и π било која трансформација из афине групе GA простора A, доказати да је тада и $\theta = \pi \cdot \eta \cdot \pi^{-1}$ хомотетија са средиштем $Q = \pi(P)$.

- кција

(*) Докажимо прво да је тачка $Q = \pi(P)$ фиксна тачка пресликавања $\pi \circ \eta \circ \pi^{-1}$.

$\pi \circ \eta \circ \pi^{-1}(\pi(P)) = \pi \circ \eta(P) = \pi \circ \chi_{P,\alpha}(P) = \pi(P)$. Приметимо затим

да је $\overrightarrow{\Pi \circ \chi_{P,\alpha} \circ \Pi^{-1}} = \vec{\Pi} \circ \vec{\chi}_{P,\alpha} \circ \overrightarrow{\Pi^{-1}} = \vec{\Pi} \circ (\alpha \, Id) \circ \overrightarrow{\Pi^{-1}} = \alpha \, \vec{\Pi} \circ Id \circ \vec{\Pi}^{-1} =$
$= \alpha \cdot Id$

линеарни део композиције је једнак композицији линеарних делова

$\overrightarrow{\Pi^{-1}} = \vec{\Pi}^{-1}$

Одавде закључујемо да је $\theta = \Pi \circ \eta \circ \Pi^{-1}$ хомотетија са средиштем $Q = \Pi(P)$ и коефицијентом који је исти као коефицијент полазне хомотетије η.

1.8. Паралелно пројектовање

За два афина потпростора Π и Γ кажемо да су суплементарни ако су такве њихове директрисе тј. ако је $\vec{\Pi} \oplus \vec{\Gamma} = \vec{E}$. Суплементарни афини потпростори имају тачно једну заједничку тачку S.

За произвољно $X \in E$ можемо посматрати $\Gamma' = X + \vec{\Gamma} \parallel \Gamma$ који је суплементаран са Π и поставити $X' \in \Pi \cap \Gamma'$. Ако $X \notin \Pi$ то је $\Gamma' = \langle X, X' \rangle$, док је $\vec{SX} = \overrightarrow{SX'} + \overrightarrow{X'X}$ јединствено растављање у $\vec{E} = \vec{\Pi} \oplus \vec{\Gamma}$. Паралелно пројектовање је пресликавање $X \mapsto X'$ односно $f: E \to \Pi \subset E$ задато са $f(S + w) = S + \pi_1(w)$ за свако $w \in \vec{E}$ које се једнозначно раставља на $w = \pi_1(w) + \pi_2(w)$ са $\pi_1(w) \in \vec{\Pi}$ и $\pi_2(w) \in \vec{\Gamma}$. Како је пројекција на векторским просторима линеарно, то је наше пресликавање афино.

Паралелно пројектовање није бијективно пресликавање и за њега важи $f^2 = f$. (онда је и $f^3 = f^2 \cdot f = f \cdot f = f, \dots$)

Теорема 1.6. (Талесова теорема) Нека су H_1, H_2, H_3 три различите паралелне хиперравни афиног простора E, а Γ и Δ две праве које нису са њима паралелне. Ако је $\{A_i\} = \Gamma \cap \Pi_i$ и $\{B_i\} = \Delta \cap \Pi_i$ за $i \in \{1,2,3\}$ тада је $\overrightarrow{A_1A_3} : \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_3} : \overrightarrow{B_1B_2}$.

Основа паралелног пројектовања је скуп његових фиксних тачака.

Директриса и основа паралелног пројектовања разапињу цео простор.

24. Доказати да у односу на фиксирани репер $Oe_1e_2e_3$ афиног простора A димензије 3 формулама $x' = 1 - x - y - 2z$, $y' = -3 + 6x + 4y + 6z$, $z' = 1 - 2x - y - z$ дефинисано пројектовање тог простора, а затим одредити његову основу и вектор правца директрисе.

Да бисмо доказали да је датим формулама дефинисано пројектовање тог простора довољно је проверити да је $x'' = x'$, $y'' = y'$ и $z'' = z'$.

$$x'' = 1 - x' - y' - 2z' = 1 - (1 - x - y - 2z) - (-3 + 6x + 4y + 6z) - 2(1 - 2x - y - z) =$$
$$= 1 - 1 + x + y + 2z + 3 - 6x - 4y - 6z - 2 + 4x + 2y + 2z =$$
$$= 1 - x - y - 2z = x'$$

$$y'' = -3 + 6x' + 4y' + 6z' = -3 + 6(1 - x - y - 2z) + 4(-3 + 6x + 4y + 6z)$$
$$+ 6(1 - 2x - y - z) = -3 + 6 - 6x - 6y - 12z - 12 + 24x + 16y + 24z$$
$$+ 6 - 12x - 6y - 6z = -3 + 6x + 4y + 6z = y'$$

$$z'' = 1 - 2x' - y' - z' = 1 - 2(1 - x - y - 2z) - (-3 + 6x + 4y + 6z)$$
$$- (1 - 2x - y - z) = 1 - 2 + 2x + 2y + 4z + 3 - 6x - 4y - 6z - 1 + 2x + y + z =$$
$$= 1 - 2x - y - z = z'$$

Дакле, датим формулама је дефинисано пројектовање тог простора димензије 3.

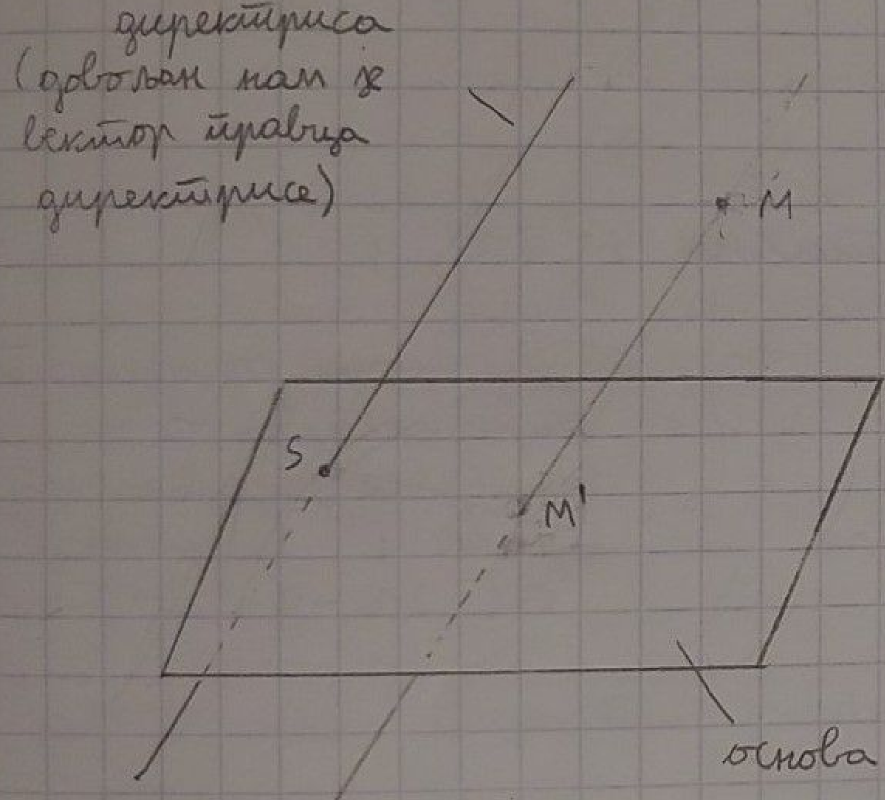
Да бисмо одредили његову основу налазимо скуп његових фиксних тачака.

$$x = 1 - x - y - 2z$$
$$y = -3 + 6x + 4y + 6z$$
$$z = 1 - 2x - y - z$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2x + y + 2z = 1 & \\ 6x + 3y + 6z = 3 \quad / \cdot \frac{1}{3} & \quad 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 & \end{array}\right\}$$

ове три једначине заправо представљају исту једначину $2x + y + 2z - 1 = 0$

Основа датог паралелног пројектовања је $2x + y + 2z - 1 = 0$ а како је представљена једном једначином у простору димензије 3 то је њена димензија једнака $3 - 1 = 2$ тј. у питању је раван, па ће директриса бити права чији ћемо вектор правца добити тако што пресликамо једну тачку која није из основе.



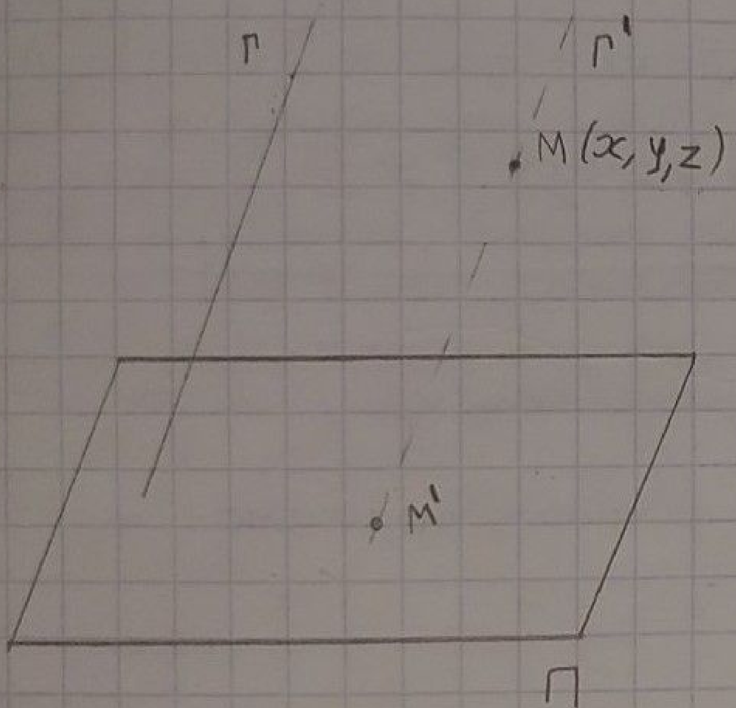
Слику M' тачке M при паралелном пројектовању добијамо тако што кроз тачку M уочимо праву паралелну са директрисом и у пресеку са основом добијамо тачку M'

Узмимо неку тачку која не припада основи нпр. $M(\overset{x}{0},\overset{y}{0},\overset{z}{1})$ $(2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2 \neq 1)$. Њена слика је тачка $M'(\overset{x'}{-1},\overset{y'}{3},\overset{z'}{0})$

па је вектор правца директрисе $\overrightarrow{MM'}(-1,3,-1)$.

25. Ако је $Oe_1e_2e_3$ дати репер афиног простора A, одредити формуле паралелног пројектовања $\pi: A \to A$ на раван $\Pi: 2x-y+z-2=0$ паралелно правој $\Gamma = \langle A, u \rangle$ где је A тачка са координатама $(-1,0,1)$ и $u = e_1+2e_2+e_3$.

*



Нека је $M(x,y,z)$ произвољна тачка. Да бисмо одредили формуле паралелног пројектовања довољно је наћи везу између координата x, y и z тачке M и координата x', y' и z' њене слике M' при паралелном пројектовању.

Тачку M' добијамо у пресеку праве Γ' паралелне са правом Γ кроз тачку $M(x,y,z)$ и равни Π.

$$\Gamma': \frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{2} = \frac{Z-z}{1} = t \leftarrow$$

Из Г1 знамо једначину праве кроз тачку (x, y, z) са вектором правца $(1, 2, 1)$

$$X = t + x$$
$$Y = 2t + y$$
$$Z = t + z$$

У пресеку праве Γ' и равни Π је тачка $M'(x', y', z')$

$$2(t+x) - (2t+y) + t + z - 2 = 0 \leftarrow$$

тражимо вредности параметра t за пресечну тачку праве Γ' и равни $\Pi: 2x - y + z - 2 = 0$

$$\cancel{2t} + 2x - \cancel{2t} - y + t + z - 2 = 0$$
$$t = -2x + y - z + 2$$

Зато је $x' = t + x = -x + y - z + 2$

$$y' = 2t + y = 2(-2x + y - z + 2) + y = -4x + 3y - 2z + 4$$
$$z' = t + z = -2x + y + 2$$

Дакле, формуле траженог паралелног пројектовања су:

$$x' = 2 - x + y - z$$
$$y' = 4 - 4x + 3y - 2z$$
$$z' = 2 - 2x + y$$

Дилатација и трансвекција

Нека је $(A_1, A_2, \dots, A_n, P)$ афина база и $\Pi = \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ такав да $\dim \Pi = n-1$ и σ пресликавање такво да је $\sigma(A_1) = A_1$, $\sigma(A_2) = A_2, \dots, \sigma(A_n) = A_n$ и $\sigma(P) = Q$ при чему $P \neq Q$.

Важи да σ фиксира Π тачка по тачка, па $P \notin \Pi$

Ако $\langle P, Q \rangle$ не сече Π онда је σ трансвекција, а ако $\langle P, Q \rangle$ сече Π онда је σ дилатација. За дилатацију имамо:

$$\Delta = P + \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})$$

$$\Delta \cap \Pi = \{S\}$$

$$S \in \Pi \Rightarrow \sigma(S) = S$$

$$Q = \sigma(P)$$

$$Q = S + \overrightarrow{SQ}$$

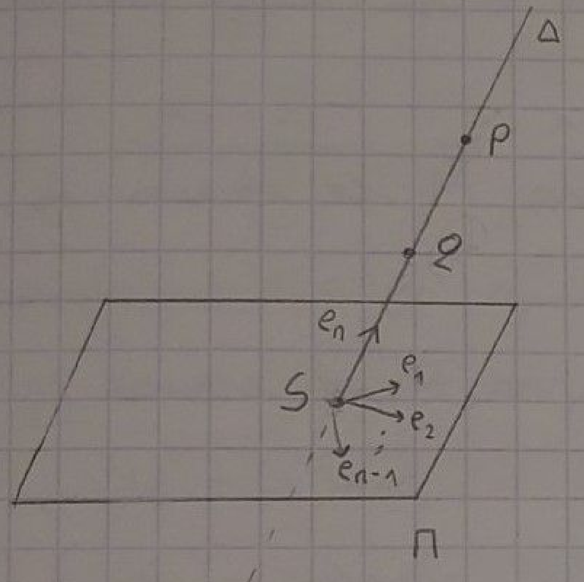
$\overrightarrow{SQ} = \alpha \cdot \overrightarrow{SP}$ $\leftarrow$ α је фиксирано тј. не зависи од избора тачке $P \notin \Pi$

α се зове коефицијент дилатације и он не може бити 0 и 1.

$\vec{SQ} = 0 \cdot \vec{SP}$ $\quad$ $\vec{SQ} = 1 \cdot \vec{SP}$

$S = Q$ $\quad$ $Q = P$

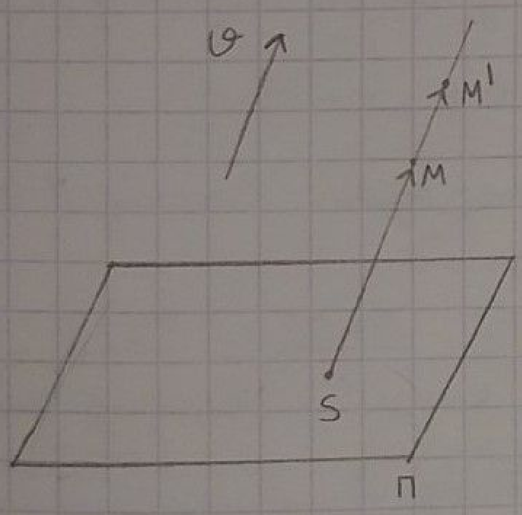
$\lightning$ $\quad$ $\lightning$



У погодно изабраној бази $Se_1 \dots e_n$ матрица дилатације је

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

Ако су нам познати коефицијент дилатације α, правац ϑ и хиперраван Π онда је $\vec{SM'} = \alpha \cdot \vec{SM}$ где је $S = \Pi \cap (M + \mathcal{L}(\vartheta))$.



За трансвекцију имамо:

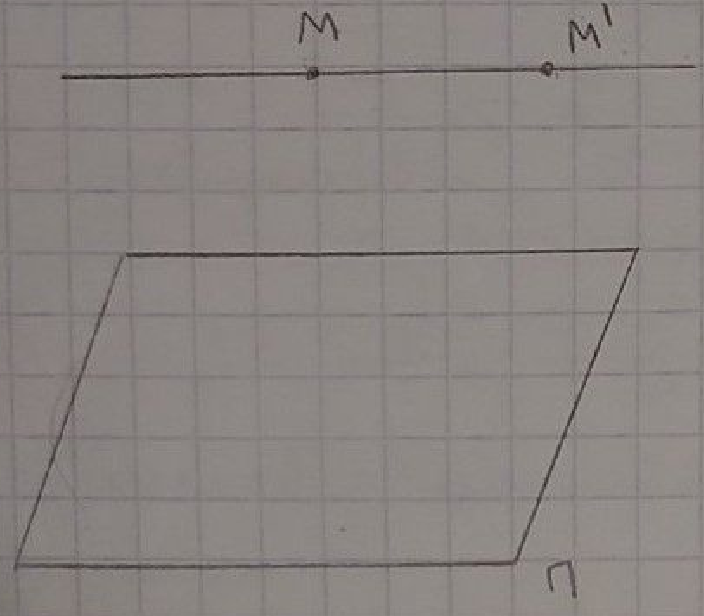
$$M' = M + \overrightarrow{MM'} \qquad \overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{\Pi}$$

$$M' = M + \pi(M)\cdot\vec{a}$$

$\vec{a}$ је фиксирани вектор (до на множења скаларом) из $\overrightarrow{\Pi}$

π је афина форма којом је одређена Π

$$\Pi:\ \underbrace{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - b}_{\pi((x_1,\dots,x_n))} = 0$$



26. Нека је у афином простору A^4 дата хиперраван

$\Pi: x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$ и тачка $M(3,-1,-2,-1)$.

Одредити формуле:

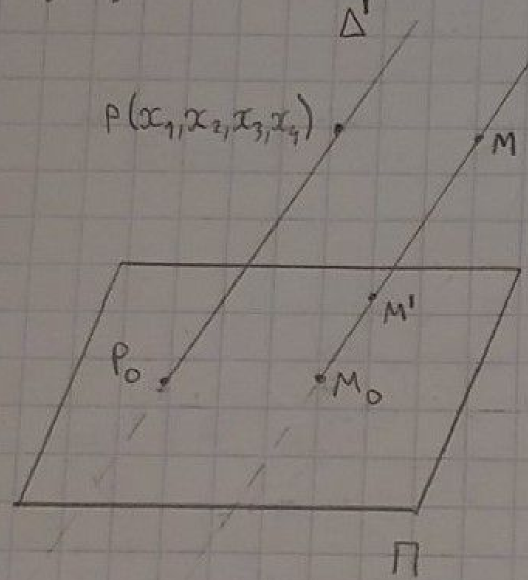
а) дилатације чија је основа Π и тачка M се слика у тачку $M'(\frac{3}{2},2,4,2)$.

б) трансвекције чија је основа Π и тачка M се слика у тачку $M'(1,0,-3,-2)$.

* а) Компоненте дилатације су основа, правац (зрак) и коефицијент дилатације.

$\Delta = \langle M, M' \rangle$

$\vec{a} = \overrightarrow{MM'} = (-\frac{3}{2}, 3, 6, 3)$ а можемо узети и $(-\frac{1}{2}, 1, 2, 1)$ ради лакшег рачуна скица у $\mathbb{R}^3$:



Једначина праве кроз тачку M чији је вектор правца $\vec{a}$

$$\Delta: \frac{x_1-3}{-\frac{1}{2}} = \frac{x_2+1}{1} = \frac{x_3+2}{2} = \frac{x_4+1}{1} = t$$

$$x_1 = -\frac{t}{2}+3$$

$$x_2 = t-1$$

$$x_3 = 2t-2$$

$$x_4 = t-1$$

Тачки $\{M_0\} = \Delta \cap \Pi$ одговара нека вредност параметра t коју одређујемо из:

$$-\frac{t}{2}+3+2(t-1)-(2t-2)+t-1=3$$

$$-\frac{t}{2}+3+\cancel{2t}-2-\cancel{2t}+2+t-1=3$$

$$\frac{t}{2}-1=0$$

$$t=2$$

Тачка M_0 има координате $M_0(2,1,2,1)$ а коефицијент дилатације је $\alpha = \dfrac{\overrightarrow{M_0M'}}{\overrightarrow{M_0M}} = \dfrac{(-\frac{1}{2},1,2,1)}{(1,-2,-4,-2)} = -\frac{1}{2}$

Да бисмо одредили тражене формуле дилатације довољно је нађи слику произвољне тачке $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Једначина праве кроз $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ паралелне са Δ је:

$$\Delta' : \quad \frac{X_1 - x_1}{-\frac{1}{2}} = \frac{X_2 - x_2}{1} = \frac{X_3 - x_3}{2} = \frac{X_4 - x_4}{1} = \lambda$$

Произвољна тачка праве Δ' је облика

$$X_1 = -\frac{\lambda}{2} + x_1$$

$$X_2 = \lambda + x_2$$

$$X_3 = 2\lambda + x_3$$

$$X_4 = \lambda + x_4$$

Тачку P_0 налазимо у пресеку праве Δ' и хиперравни Π.

$$-\frac{\lambda}{2} + x_1 + 2(\lambda + x_2) - (2\lambda + x_3) + \lambda + x_4 = 3$$

$$-\frac{\lambda}{2} + x_1 + 2\lambda + 2x_2 - 2\lambda - x_3 + \lambda + x_4 = 3$$

$$\frac{\lambda}{2} + x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$\lambda = 6 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4$$

Координате тачке $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ налазимо помоћу

$$\overrightarrow{P_0P'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P}$$

$$[P'] - [P_0] = -\frac{1}{2}([P] - [P_0])$$

$$[P'] = -\frac{1}{2}[P] + \frac{3}{2}[P_0]$$ па су тражене формуле дилатације

$$x_1' = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{\lambda}{2} + x_1\right) = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{3}{2}x_1 =$$

$$= x_1 - \frac{3}{4}\lambda = x_1 - \frac{3}{4}(6 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4) =$$

$$= -\frac{9}{2} + \frac{5}{2}x_1 + 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4$$

$$x_2' = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}(\lambda + x_2) = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}x_2 =$$

$$= x_2 + \frac{3}{2}(6 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4) =$$

$$= x_2 + 9 - 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 - 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4$$

$$x_3' = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}(2\lambda + x_3) = -\frac{1}{2}x_3 + 3\lambda + \frac{3}{2}x_3 = x_3 + 3(6 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4)$$

$$= x_3 + 18 - 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 18 - 6x_1 - 12x_2 + 7x_3 - 6x_4$$

$$x_4' = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}(\lambda + x_4) = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}x_4 = x_4 + \frac{3}{2}(6 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4)$$

$$= 9 - 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4$$

б) $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$

π - афина форма која је једнозначно одређена са Π

до на константу

$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3$. За произвољну тачку P

и њену слику P' важи $P' = P + \overrightarrow{PP'} = P + \lambda_P \cdot \vec{a}$

$\vec{a}$ правац трансвекције

$\lambda_P = \pi(P)$ висина на којој се тренутно налазимо

$M' = M + \lambda_M \cdot \vec{a}$

$\lambda_M = \pi(M) = 3 + 2\cdot(-1) - (-2) + (-1) - 3 = 3 - 2 + 2 - 4 = -1$

$M(3, -1, -2, -1)$

$M' = M - \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{M'M} = (2, -1, 1, 1)$

$M'(1, 0, -3, -2)$

Да бисмо одредили формуле трансвекције довољно је да нађемо координате слике $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ тачке $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ при трансвекцији.

$$P' = P + \lambda_P \cdot \vec{a}$$

$$(x_1', x_2', x_3', x_4') = (x_1, x_2, x_3, x_4) + (x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3) \cdot (2, -1, 1, 1)$$

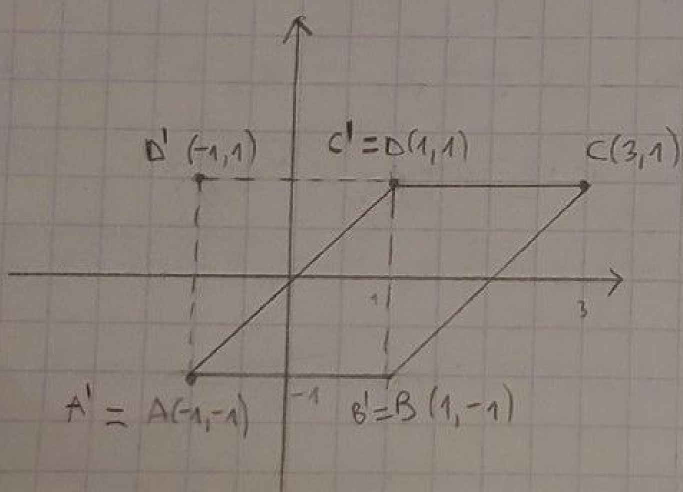
$$x_1' = x_1 + 2(x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3) = -6 + 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4$$

$$x_2' = x_2 - (x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3) = 3 - x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$

$$x_3' = x_3 + (x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3) = -3 + x_1 + 2x_2 + x_4$$

$$x_4' = x_4 + (x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3) = -3 + x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4.$$

27. Одредити формуле неке трансвекције којом се паралелограм $ABCD$ слика на неки квадрат, ако су координате темена $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(3,1)$ и $D(1,1)$.



трансвекција има фиксну хиперраван што је у овом случају права па можемо узети $A' = A$, $B' = B$, $C' = D$ и $D'(-1,1)$

Вектор $\overrightarrow{AB}\,(2,0)$ се слика у себе, а вектор $\overrightarrow{AD}\,(2,2)$ у вектор $\overrightarrow{AD'}\,(0,2)$

Нека је f формула уочене трансвекције и $\vec{f}$ њен линеарни део.

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} : \underset{(2,0)}{\overrightarrow{AB}} \mapsto \underset{(2,0)}{\overrightarrow{AB}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a_{11} = 2 \\ 2a_{21} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{f} : \underset{(2,2)}{\overrightarrow{AD}} \mapsto \underset{(0,2)}{\overrightarrow{AD'}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 + 2a_{12} = 0 \\ 2a_{22} = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 1 \end{matrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$x' = x - y + b_1$$

$$y' = y + b_2$$

Треба још одредити реалне бројеве b_1 и b_2 што можемо урадити користећи чињеницу да се тачка $A(-1,-1)$ слика у себе при уоченој трансвекцији.

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)-(-1)+b_1 \\ -1 &= -1+b_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} b_1 &= -1 \\ b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Формуле уочене трансвекције су:

$$x' = x - y - 1$$

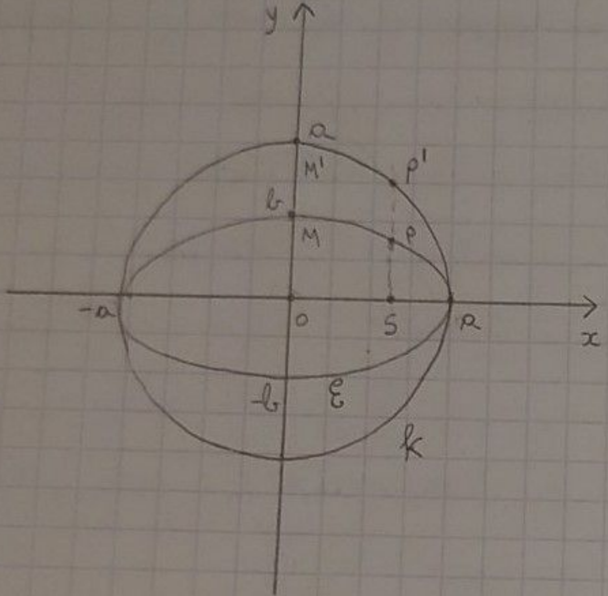
$$y' = y$$

Лако се проверава да уочена трансвекција заиста слика паралелограм $ABCD$ на квадрат $ABC'D'$.

28. Одредити формуле неке афине трансформације којом се елипса

$\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$ слика у круг $k: x^2 + y^2 = a^2$.

*



Довољно је узети дилатацију која фиксира x осу тј. чија је основа x оса а правац је y-оса и коефицијент дилатације је $\frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}} = \frac{a}{b}$ где су тачке O, M и M' означене на слици.

Формуле тражене дилатације су:

$$x' = x$$

$$y' = \frac{a}{b} y$$

Матрица овог пресликавања је $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix}$ што јесте облик матрице дилатације. Заиста важи и да се елипса ε слика у круг k јер

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 \underset{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}{\overset{\uparrow}{=}} x^2 + a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \cancel{x^2} + a^2 - \cancel{x^2} = a^2$$