Пример у $\mathbb{R}^4$: $Oe_1e_2e_3e_4$

$\Pi = Oe_1e_2$ $\quad \Gamma = Oe_3e_4$ су две равни чији је пресек

$\Pi \cap \Gamma = \{O\}$

12. У четвородимензионалном простору одредити међусобни положај равни $\alpha: x_1 + x_2 + 1 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$ и $\beta: x_1 = 1+t$, $x_2 = 2+s$, $x_3 = t-2s$, $x_4 = 1+t-s$, $t, s \in \mathbb{R}$.

✱ α: $x_1 + x_2 + 1 = 0$ $\qquad\qquad \beta$: $x_1 = 1+t$

$x_3 - x_4 = 0$ $\qquad\qquad x_2 = 2+s$

$x_3 = t-2s$

$x_4 = 1+t-s$

Раван β је представљена помоћу параметара t и s.

Помоћу параметарских једначина желимо да представимо и раван α.

коефицијенти уз ϑ дају други вектор

α: $x_1 = u$

$x_2 = -1-u$

$x_3 = \vartheta$

$x_4 = \vartheta$

$$\alpha = (0,-1,0,0) + \mathcal{L}(e_1, e_2)$$

једна тачка равни α (за $u=\vartheta=0$)

коефицијенти уз u дају један вектор

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ и они су линеарно независни

$$a e_1 + b e_2 = 0 \overset{?\checkmark}{\Rightarrow} a=b=0$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ -a &= 0 \\ b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$$\beta = (1,2,0,1) + \mathcal{L}(f_1, f_2)$$

једна тачка равни β (за $s=t=0$)

$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ и они су линеарно независни

$$a \cdot f_1 + b \cdot f_2 = 0 \overset{?\checkmark}{\Rightarrow} a = b = 0$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ a - 2b &= 0 \\ a - b &= 0 \end{aligned} \Rightarrow a = b = 0$$

Нађимо сада $\alpha \cap \beta$.

$$\left.\begin{aligned} u &= 1 + t \\ -1 - u &= 2 + s \\ v &= t - 2s \\ v &= 1 + t - s \end{aligned}\right\} \Rightarrow t - 2s = 1 + t - s$$

$$\Downarrow$$

$$s = -1$$

$$-1 - u = 2 - 1$$

$$\boxed{u = -2}$$

$$t = u - 1$$

$$t = -2 - 1$$

$$t = -3$$

$$v = t - 2s$$

$$v = -3 + 2$$

$$\boxed{v = -1}$$

$\alpha \cap \beta = \{(-2, 1, -1, -1)\}$

Дакле равни се секу у једној тачки.

Примедба: Да бисмо нашли $\dim\langle \alpha\cup\beta\rangle$ довољно је наћи ранг

матрице

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ранг ове матрице је 4

$\dim\langle \alpha\cup\beta\rangle = 4$

$\dim\langle \alpha\cup\beta\rangle = \dim\alpha + \dim\beta - \dim\alpha\cap\beta$ из задатка (11) јер

$4 = 2 + 2 - \dim\alpha\cap\beta$ $(-2,1,-1,-1)\in\alpha\cap\beta$

$\Rightarrow \dim\alpha\cap\beta = 0$ $\Rightarrow$ пресек $\alpha\cap\beta$ није права

Пресек равни α и β је једна тачка па је ово још један

пример за задатак (11).

(13.) Испитати узајамни положај афиних потпростора

$\Pi = (0,-1,6,1) + \mathcal{L}((1,0,-1,0))$ и $\Gamma: 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 1$

(*) $\Gamma: 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 1$

$x_1 = t$

$x_2 = s$

$x_3 = \lambda$

$t, s, \lambda \in \mathbb{R}$

$x_4 = \frac{2}{7}t + \frac{4}{7}s + \frac{2}{7}\lambda - \frac{1}{7}$

$\Gamma = \{ (t, s, \lambda, \frac{2}{7}t + \frac{4}{7}s + \frac{2}{7}\lambda - \frac{1}{7}) \mid t, s, \lambda \in \mathbb{R} \}$

$\Gamma = (0,0,0,-\frac{1}{7}) + \mathcal{L}((1,0,0,\frac{2}{7}), (0,1,0,\frac{4}{7}), (0,0,1,\frac{2}{7}))$

$a \cdot (1,0,0,\frac{2}{7}) + b \cdot (0,1,0,\frac{4}{7}) + c \cdot (0,0,1,\frac{2}{7}) = 0 \overset{?\checkmark}{\Longrightarrow} a = b = c = 0$

$a = 0$
$b = 0$
$c = 0$
$\frac{2}{7}a + \frac{4}{7}b + \frac{2}{7}c = 0$ ✓

$\dim \vec{\Gamma} = 3$ јер су вектори $(1,0,0,\frac{2}{7})$, $(0,1,0,\frac{4}{7})$ и $(0,0,1,\frac{2}{7})$ линеарно независни

Da li je $(0,-1,6,1) \in \Gamma$?

$$2\cdot 0 + 4\cdot(-1) + 2\cdot 6 - 7\cdot 1 \overset{?}{=} 1 \quad \checkmark$$

Da li je $\vec{\Pi} \subset \vec{\Gamma}$?

$$\mathcal{L}((1,0,-1,0)) \subset \mathcal{L}\left(\left(1,0,0,\tfrac{2}{7}\right), \left(0,1,0,\tfrac{4}{7}\right), \left(0,0,1,\tfrac{2}{7}\right)\right)$$

$$(1,0,-1,0) = \alpha\cdot\left(1,0,0,\tfrac{2}{7}\right) + \beta\left(0,1,0,\tfrac{4}{7}\right) + \gamma\left(0,0,1,\tfrac{2}{7}\right)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \\ 0 &= \beta \\ -1 &= \gamma \\ 0 &= \tfrac{2}{7}\alpha + \tfrac{4}{7}\beta + \tfrac{2}{7}\gamma \quad \checkmark \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= -1 \end{aligned}$$

Dakle, $\Pi \subset \Gamma$.

14. Нека је Π афини омотач тачака $A(1,1,1,1)$, $B(2,2,0,0)$ и $C(1,2,0,1)$, а Γ афини омотач тачака $D(1,1,1,2)$ и $E(1,1,2,1)$. Одредити узајамни положај Π и Γ и растојање између Π и Γ.

(*)

$$\Pi = \langle A, B, C \rangle$$

$$\Gamma = \langle D, E \rangle$$

$$\Pi = \underbrace{(1,1,1,1)}_{= A} + \mathcal{L}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (1,1,1,1) + \mathcal{L}\big(\underbrace{(1,1,-1,-1)}_{\text{коефицијенти уз } t}, \underbrace{(0,1,-1,0)}_{\text{коефицијенти уз } s}\big) = \overrightarrow{\Pi}$$

$\overrightarrow{AB}\,(1,1,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}\,(0,1,-1,0)$

$$a\cdot(1,1,-1,-1) + b\cdot(0,1,-1,0) = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ a+b &= 0 \\ -a-b &= 0 \\ -a &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \Pi = \dim \overrightarrow{\Pi} = 2$$

Параметарска једначина за Π је

$$\begin{aligned} x_1 &= 1+t \\ x_2 &= 1+t+s \qquad t, s \in \mathbb{R} \\ x_3 &= 1-t-s \\ x_4 &= 1-t \end{aligned}$$

$$\Gamma = \underbrace{(1,1,1,2)}_{= D} + \mathcal{L}(\underbrace{\overrightarrow{DE}}_{= (0,0,1,-1)}) = (1,1,1,2) + \mathcal{L}\big((0,0,1,-1)\big)$$

Параметарска једначина за Γ је

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 1+\lambda \\ x_4 &= 2-\lambda \end{aligned}$$

Да ли се Π и Γ секу?

$$1+t=1 \quad \Rightarrow \quad t=0$$

$$1+t+s=1 \qquad s=0$$

$$1-t-s=1+\lambda \qquad \lambda=0$$

$$1-t=2-\lambda \qquad 1=2 \ \lightning$$

$$\Rightarrow \Pi \cap \Gamma = \emptyset$$

$$\vec{\Pi} = \mathcal{L}\left((1,1,-1,-1),(0,1,-1,0)\right) \qquad \dim \vec{\Pi} = 2$$

$$\vec{\Gamma} = \mathcal{L}\left((0,0,1,-1)\right) \qquad \dim \vec{\Gamma} = 1$$

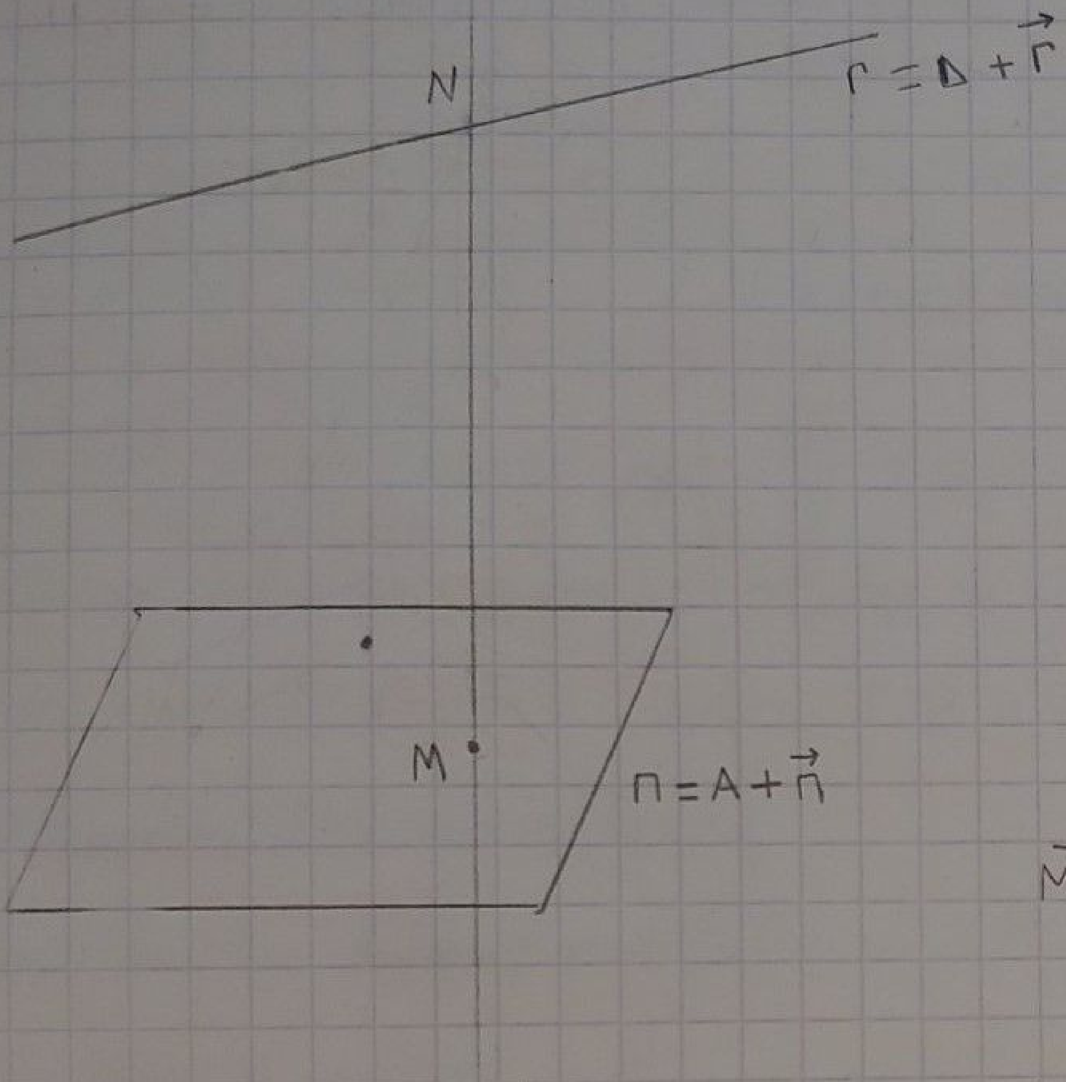
Због малих димензија довољно је проверити само да ли је

$$(0,0,1,-1) \in \mathcal{L}\left((1,1,-1,-1),(0,1,-1,0)\right)$$

$$(0,0,1,-1) = a\cdot(1,1,-1,-1) + b\cdot(0,1,-1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} a=0 \\ a+b=0 \\ -a-b=1 \\ -a=-1 \end{array}\right\} \lightning \qquad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma} \not\subset \vec{\Pi}$$

Није, па како су Π и Γ дисјунктни и нису паралелни онда су мимоилазни.



$$M \in \Pi$$

$$M(1+t,\ 1+t+s,\ 1-t-s,\ 1-t)$$

$$N \in \Gamma$$

$$N(1,1,1+\lambda,2-\lambda)$$

$$\overrightarrow{MN}(-t,\ -t-s,\ \lambda+t+s,\ 1-\lambda+t)$$

$$\overrightarrow{MN} \perp \vec{\Pi} \iff \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MN} \perp \vec{\Gamma} \iff \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta E}$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff -t-t-s\underline{-\lambda}-t-s-1\underline{+\lambda}-t=0$$

$$-4t-2s-1=0$$

$$\boxed{2t+s=-\frac{1}{2}}$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff -t-s-\lambda-t-s=0$$

$$\boxed{\lambda=-2t-2s}$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{\Delta E} = 0 \iff \lambda+t+s-1+\lambda-t=0$$

$$\boxed{2\lambda=1-s}$$

$2t + s = -\frac{1}{2}$

$\lambda = -2t - 2s$

$2\lambda = 1 - s$

$-4t - 4s = 1 - s$

$-4t - 3s = 1$

$2t + s = -\frac{1}{2} \quad / \cdot 2$

$4t + 2s = -1$

$-s = 0 \Rightarrow s = 0$

$-4t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}$

$2\lambda = 1 - s \qquad 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$M\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$

$N\left(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{MN}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$$d(\text{п}, \text{г}) = \|\overrightarrow{MN}\| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

15. Ако су $(4,3), (5,4), (2,2)$ и (x,y) координате тачака A, B, C и M у односу на дати репер Oe_1e_2 афине равни $\mathcal{A}$, прво доказати да је (A, B, C) једна афина база те равни, а затим одредити и барицентричне координате уочене тачке M у односу на ту базу.

(*) Узмемо тачку A и фиксирамо је као координатни почетак.

$\vec{AB}(1,1)$ и $\vec{AC}(-2,-1)$ су линеарно независни па (A,B,C) јесте афина база.

$$a(1,1)+b(-2,-1)=(0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} a-2b&=0 \\ a-b&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b=a=0$$

$M=\alpha A+\beta B+\gamma C$ где $\alpha+\beta+\gamma=1$

$$(x,y)=(4\alpha+5\beta+2\gamma,\ 3\alpha+4\beta+2\gamma)$$

$$\begin{aligned} 4\alpha+5\beta+2\gamma&=x \\ 3\alpha+4\beta+2\gamma&=y \\ \alpha+\beta\boxed{+\gamma}&=1 \quad /\cdot(-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta\boxed{+\gamma}&=1 \\ \boxed{\alpha}+2\beta&=y-2 \quad /\cdot(-2) \\ 2\alpha+3\beta&=x-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta\boxed{+\gamma}&=1 \\ \boxed{\alpha}+2\beta&=y-2 \\ -\beta&=x-2y+2 \end{aligned}$$

$$\beta=-x+2y-2$$

$$\alpha=y-2-2\beta=y-2+2x-4y+4$$

$$=2x-3y+2$$

$$\gamma=1-\alpha-\beta=1-2x+3y-2+x-2y+2=$$

$$=-x+y+1$$

Тражене баријентричне координате уочене тачке M у односу на базу (A,B,C) су $(2x-3y+2,\ -x+2y-2,\ -x+y+1)$.

16. Ако су (x_r, y_r, z_r) координате тачака A_r у односу на дати репер $O_{e_1e_2e_3}$ афиног простора $\mathcal{A}$ димензије 3 доказати да су тачке $A_0, A_1, A_2,$ A_3 компланарне ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 & y_3-y_0 \\ z_1-z_0 & z_2-z_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$\circledast$ Тачке A_0, A_1, A_2, A_3 су компланарне ако и само ако су вектори $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$ и $\overrightarrow{A_0A_3}$ линеарно зависни а то је еквивалентно са

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 & y_3-y_0 \\ z_1-z_0 & z_2-z_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{што се и тражило}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overrightarrow{A_0A_1} & \overrightarrow{A_0A_2} & \overrightarrow{A_0A_3} \end{array}$$

Примедба: Приметимо и да је

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \overset{\cdot(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ 0 & x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ 0 & x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} \underset{\det M = \det M^T}{=} \begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 & y_3-y_0 \\ z_1-z_0 & z_2-z_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}$$

17. Чевина и Менелајева теорема

Дат је неки тротеменик ABC и тачке P, Q и R на правама BC, AC и AB такве да $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\alpha$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\beta$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\gamma$.

Чевина теорема: Праве AP, BQ и CR су конкурентне акко $\alpha\beta\gamma=1$.

Менелајева теорема: Тачке P, Q и R су колинеарне акко $\alpha\beta\gamma=-1$.

* • Доказ Чевине теореме:

Тачка P је баријентар $(B,1)$ и (C,α) јер је $1\cdot\overrightarrow{PB}+\alpha\cdot\overrightarrow{PC}=0$ због $\overrightarrow{BP}=\alpha\cdot\overrightarrow{PC}$

$1+\alpha\neq 0$ јер $\alpha\neq-1$ (да је $\alpha=-1$ имали бисмо $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=-1$ тј. $B=C$)

Тачка Q је баријентар (C,α) и $(A,\alpha\beta)$ јер је $\alpha\cdot\overrightarrow{QC}+\alpha\beta\cdot\overrightarrow{QA}=0$

тј. $\overrightarrow{QC}+\beta\overrightarrow{QA}=0$ ($\alpha\neq 0$ јер би у супротном $B=P$ и AP и CR би се секле у тачки R која није на BQ јер да јесте A, B и C би биле колинеарне) тј. $\vec{CQ} = \beta \cdot \vec{QA}$. Уочимо да је $\{S\} = AP \cap BQ$ барицентар тачака $(A, \alpha\beta)$, $(B, 1)$ и (C, α) јер на основу тврђења из задатка ① знамо да се тај барицентар налази и на правој AP и на правој BQ. Остаје још само да се докаже да је $\{R\} = CS \cap AB$ акко $\alpha\beta\gamma = 1$. Нека је $\{R_1\} = CS \cap AB$. Тада $\frac{\vec{AR_1}}{\vec{R_1B}} = \frac{1}{\alpha\beta}$ јер тачка R_1 представља барицентар тачака $(A, \alpha\beta)$ и $(B, 1)$.

Зато $R = R_1 \iff \frac{\vec{AR_1}}{\vec{R_1B}} = \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} \iff \frac{1}{\alpha\beta} = \gamma \iff \alpha\beta\gamma = 1$

чиме смо доказали Чевину теорему.

Доказ Менелајеве теореме:

Уведимо тачку $\Delta \in AB$ тако да је B барицентар $(A, \alpha\beta)$ и $(\Delta, 1-\alpha\beta)$ и тада је $\alpha\beta \vec{BA} + (1-\alpha\beta)\vec{B\Delta} = 0 \iff \vec{B\Delta} + \alpha\beta(\vec{BA} - \vec{B\Delta}) = 0$

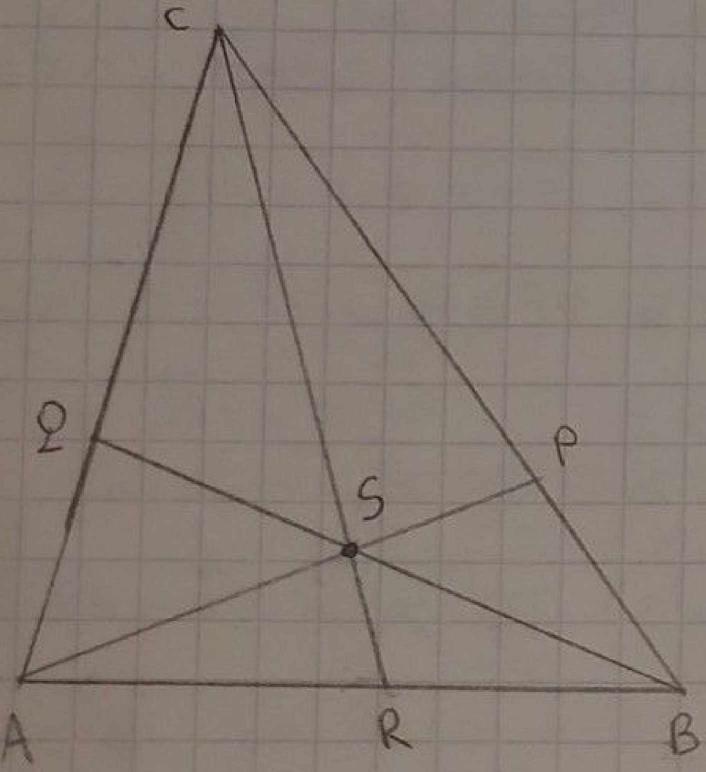
$\iff \vec{B\Delta} + \alpha\beta \vec{\Delta A} = 0 \iff \vec{\Delta B} + \alpha\beta \vec{A\Delta} = 0 \iff \alpha\beta \vec{A\Delta} = -\vec{\Delta B}$

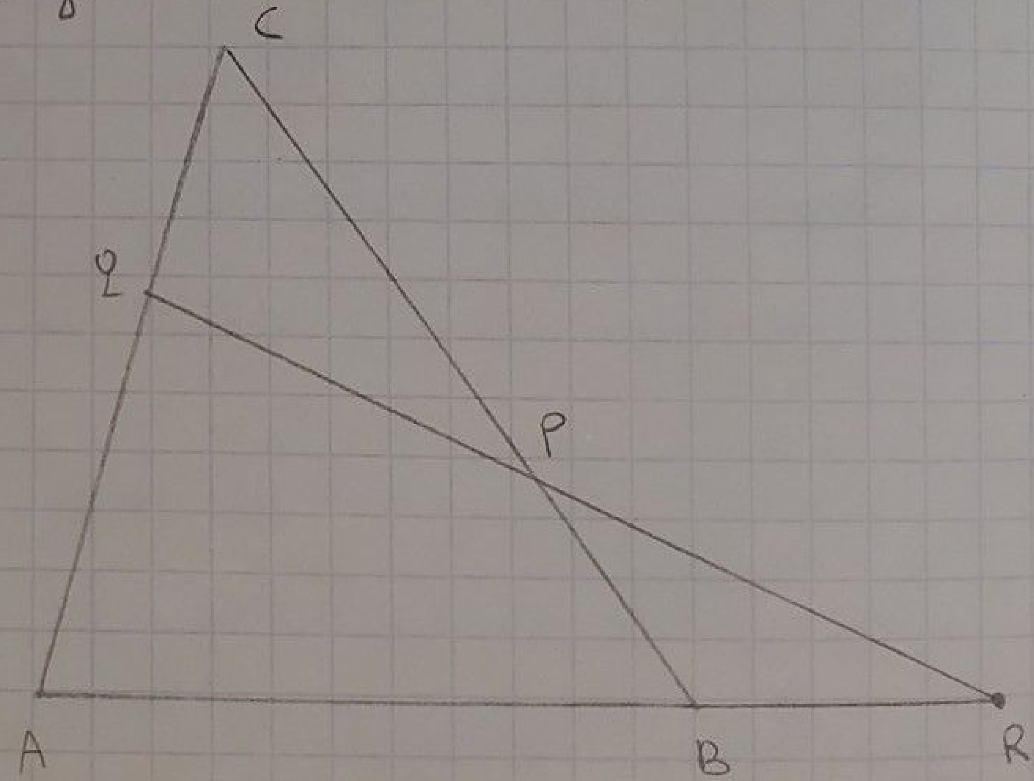
$\underset{\alpha\beta \neq 0}{\iff} \frac{\vec{A\Delta}}{\vec{\Delta B}} = -\frac{1}{\alpha\beta}$

Тачка P је барицентар за $(A, \alpha\beta)$, $(D, 1-\alpha\beta)$ и (C, α) јер је P тачка на BC таква да је барицентар за $(B, 1)$ и (C, α) јер је $1\cdot\overrightarrow{PB} + \alpha\cdot\overrightarrow{PC} = 0$ због $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \alpha$. Зато $P \in DQ$ јер је Q барицентар за $(A, \alpha\beta)$ и (C, α) због $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \beta$.

Тачке P, Q и R су колинеарне $\Leftrightarrow$ $R = D$ (јер су обе тачке R и D и на правој AB и на правој QP) $\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = -1$

чиме смо доказали Менелајеву теорему.





1.5. Афина пресликавања

Афино пресликавање је пресликавање које чува барицентре, тј. за афине просторе $(E, \vec{E}, +)$ и $(E', \vec{E'}, +')$ чије су директрисе над истим пољем $\mathbb{F}$ пресликавање $f: E \to E'$ је афино ако за све тежинске тачке (A_i, α_i) из $E \times \mathbb{F}$ где је $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ важи $f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(A_i)$.

<u>Теорема 1.1</u> Ако је $h: \vec{E} \to \vec{E'}$ линеарно пресликавање тада је за фиксирано $A \in E$ и $B \in E'$ са $f(A+v) = B +' h(v)$ дефинисано афино пресликавање $f: E \to E'$

<u>Теорема 1.2</u> За свако афино пресликавање $f: E \to E'$ постоји јединствено пресликавање $\vec{f}: \vec{E} \to \vec{E'}$ такво да је $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$ за свако $A \in E$ и свако $v \in \vec{E}$.

- Линеарно пресликавање $\vec{f}: \vec{E} \to \vec{E'}$ зовемо линеарни део афиног пресликавања f. Услов $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$ се може сменом $v = \overrightarrow{AB}$ еквивалентно записати као $f(B) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ или $\overrightarrow{f(A)\,f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$.
- Ако је f инјективно или сурјективно онда је такво и $\vec{f}$.
- Слика $f(V)$ афиног потпростора V је афини потпростор од E' па је слика праве тачка или права (што значи да се чува колинеарност).
- Афино пресликавање чува: барицентре, афине потпросторе, колинеарност, однос дељења дужи и паралелност.

(18.) Ако је S фиксирана тачка афиног простора $\mathcal{A}$ и α фиксирани скалар, доказати да је са $\pi: M \mapsto N$ где је N тачка за коју је $\overrightarrow{SN} = \alpha \cdot \overrightarrow{SM}$ дефинисано и једно афино пресликавање $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

(*) Приметимо да се тачка S слика у себе јер је $\overrightarrow{S\pi(S)} = \alpha \cdot \overrightarrow{SS} = 0 \Rightarrow$
$\pi(S) = S$.

$$\left.\begin{aligned} &\pi(M) = \pi(S + \overrightarrow{SM}) \\ &\pi(M) = N = S + \overrightarrow{SN} = S + \underline{\alpha \cdot \overrightarrow{SM}} = \underset{\substack{\parallel \\ S}}{\pi(S)} + \underline{h(\overrightarrow{SM})} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &h(\overrightarrow{SM}) = \alpha \cdot \overrightarrow{SM} \\ &h = \alpha \cdot Id \end{aligned}$$

$\Rightarrow h$ је линеарно пресликавање из $\vec{A}$ у $\vec{A}$ па је $\pi(M) = S + h(\overrightarrow{SM})$ на основу теореме 1.1 афино пресликавање што је и требало доказати.