АФИНА ГЕОМЕТРИЈА

Афина геометрија је уопштење еуклидске геометрије у ком занемарујемо метричке концепте.

1.2. Афини простор

Деф Афини простор је тројка $(E, \vec{E}, +)$ где је E скуп тачака, $\vec{E}$ векторски простор, а $+ : E \times \vec{E} \to E$ дејство такво да:

(A1) $(\forall A \in E)\ A + 0 = A$

(A2) $(\forall A \in E)\ (\forall u, v \in \vec{E})\ (A+u)+v = A+(u+v)$

(A3) $(\forall A, B \in E)\ (\exists!\, u \in \vec{E})\ B = A + u$

аксиоме

овај јединствени вектор $u \in \vec{E}$ обележавамо са $\overrightarrow{AB}$ или $B-A$

па $\forall A, B \in E$ имамо $B = A + \overrightarrow{AB}$

Векторски простор $\vec{E}$ је директриса афиног простора.

- $(\forall A \in E)(\forall v \in \vec{E})\quad \overrightarrow{A(A+v)} = v$
- Шалов идентитет: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$
- Закон паралелограма: $\vec{AB} = \vec{DC} \Longleftrightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$

$$\uparrow$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$$

Димензија афиног простора је димензија његове директрисе, тј.

$\dim E = \dim \vec{E}$.

Сваки векторски простор $\vec{E}$ има структуру афиног простора тако што узмемо $E = \vec{E}$, док афини простор не мора бити векторски.

1.3. Барицентри

<u>Деф</u> За фамилије тачака $A_i \in E$ и скалара $\alpha_i \in \mathbb{F}$ за $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ при чему је $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ дефинишемо барицентар као тачку $B + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{BA_i}$.

Дефиниција је коректна јер $B + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{BA_i}$ не зависи од избора тачке B и зато га краће обележавамо са $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i$

Често уместо појединих фамилија говоримо о тежинским тачкама $(A_i, \alpha_i) \in E \times \mathbb{F}$, тј. тачкама A_i које имају тежину α_i. Појам барицентар има физички смисао и представља центар масе система од k тачака које имају свој положај и масу, при чему је $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Код нас ће и негативне масе бити дозвољене. Тежиште добијамо за $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \frac{1}{k}$.
За барицентар $X = B + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{BA_i}$ имамо $\overrightarrow{BX} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{BA_i}$

па ако узмемо $B = X$ добијамо $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{XA_i} = 0$.

1.4. Афини потпростор

Деф Афини потпростор афиног простора $(E, \vec{E}, +)$ је подскуп V од E такав да за сваку фамилију $(A_i, \alpha_i) \in V \times \mathbb{F}$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ за коју је $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ важи $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i \in V$.

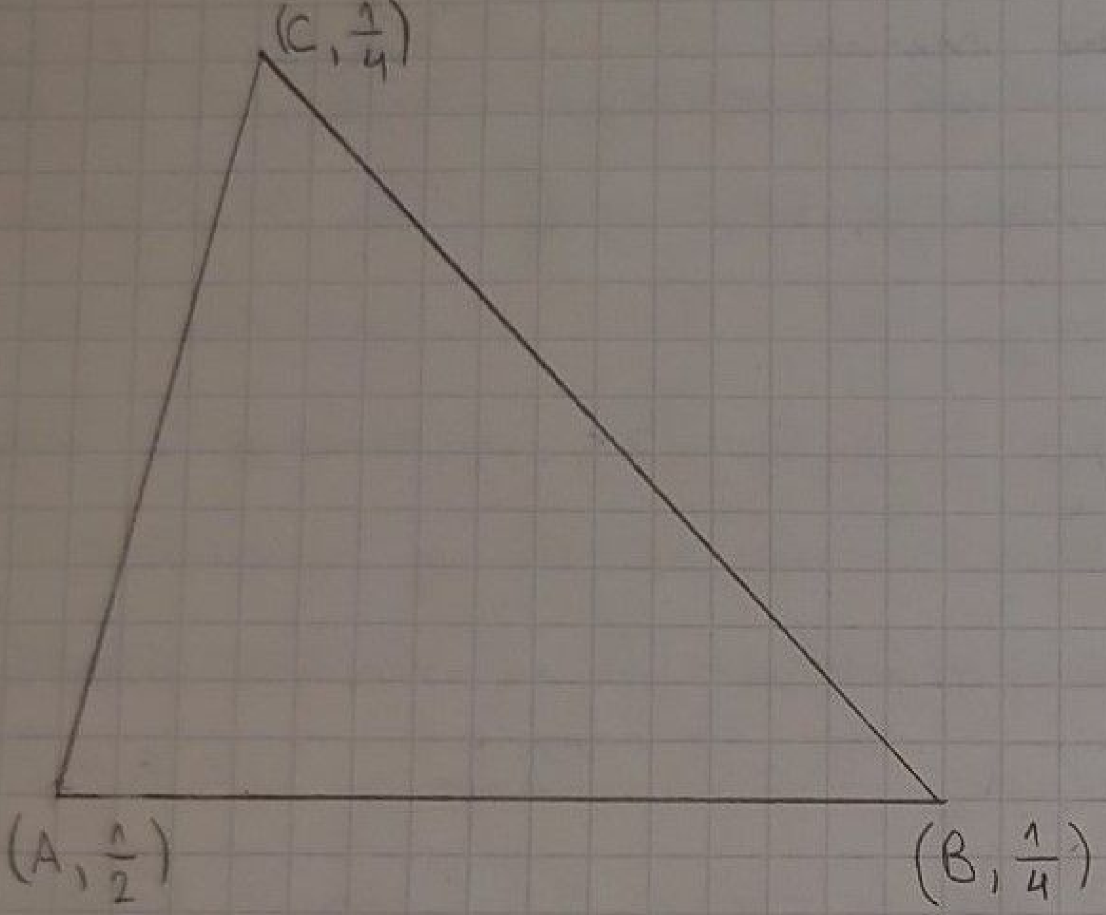
Дакле, афини потпростор афиног простора $(E, \vec{E}, +)$ је подскуп тачака афиног простора који је затворен за афине комбинације тј. барицентре.

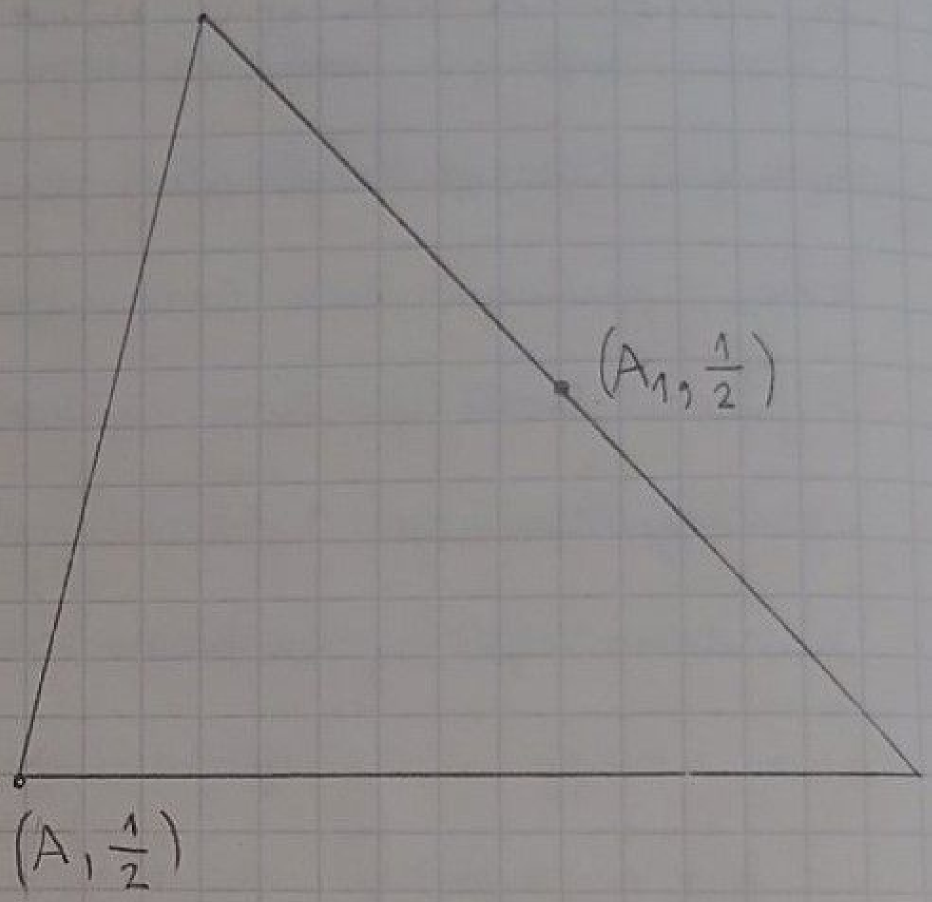
- ∅ је афини потпростор
- Пресек афиних потпростора је афини потпростор.
- Сваки афини потпростор афиног простора $(E, \vec{E}, +)$ је облика $A + \vec{V}$ где је $\vec{V}$ векторски потпростор од $\vec{E}$, а A тачка из E која припада том потпростору.
- Афини потпростор димензије 1 је права, димензије 2 раван, а кодимензије 1 хиперраван.
- Кажемо да су афини потпростори U и V паралелни ако имају исте директрисе тј. $\vec{U} = \vec{V}$. Како је $U = A + \vec{U}$ и $V = B + \vec{V} = B + \vec{U}$ за произвољне $A \in U$ и $B \in V$ па је V добијено из U транслацијом за вектор $\vec{AB}$. За афине потпросторе различитих димензија имамо релаксирану варијанту паралелности. Афини потпростори су паралелни ако је директриса једног садржана у директриси другог тј. $U \parallel V$ акко $\vec{U} \subseteq \vec{V}$ или $\vec{V} \subseteq \vec{U}$. Оваква релација паралелности јесте

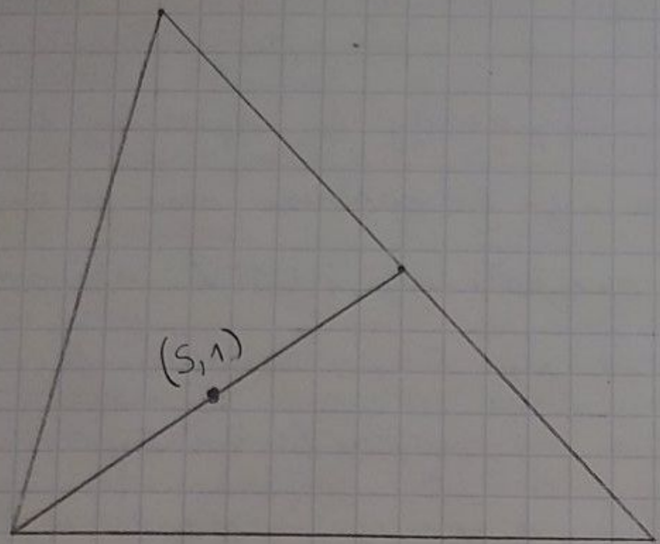
рефлексивна и симетрична, али не мора бити транзитивна.
Ако су потпростори дисјунктни, а нису паралелни онда су мимоилазни.
Тачке $A, B, C \in E$ су колинеарне ако су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ линеарно зависни.
Тачке $A, B, C, D \in E$ су компланарне ако су вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ линеарно зависни.
За дати афини простор $(E, \overrightarrow{E}, +)$ и $\emptyset \neq S \subset E$, најмањи афини потпростор који садржи S зовемо афини омотач скупа S и обележавамо га са $\langle S \rangle$. То је заправо пресек свих афиних потпростора који садрже S, тј. скуп свих барицентара за тачке из S.
За коначну колекцију тачака $A_1, \dots, A_k \in E$ афини омотач је афини потпростор

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}$$

1. Одредити барицентар тачака A, B и C ако су њихове масе редом $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$.







$(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\dots,(A_n,\alpha_n)$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$

B – барицентар овог система тачака

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{BA_i}=0$ (☆)

B_1 – барицентар система $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_k,\alpha_k)$

B_2 – барицентар система $(A_{k+1},\alpha_{k+1}),\dots,(A_n,\alpha_n)$

тачније тачке B_1 и B_2 су такве да је $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{B_1A_i}=0$ и $\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{B_2A_i}=0$ (∗)

Барицентар система $(B_1,\alpha_1+\dots+\alpha_k)$ и $(B_2,\alpha_{k+1}+\dots+\alpha_n)$ тј. тачка B' је таква да је $(\alpha_1+\dots+\alpha_k)\overrightarrow{B'B_1}+(\alpha_{k+1}+\dots+\alpha_n)\overrightarrow{B'B_2}=0$ па када саберемо то са (∗) добијамо

$$0=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{B'A_i}+\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{B'A_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{B'A_i}$$

а из (☆) је $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{BA_i}=0$ па је $\overbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}^{1}\overrightarrow{B'B}=0 \Rightarrow B'=B$. Овим смо доказали следеће тврђење:

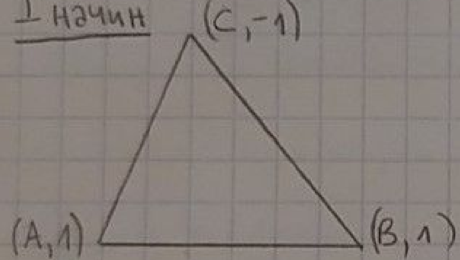
$\boxed{T}$ Барицентар B фамилије од n тежинских тачака можемо рачунати тако што ћемо одредити барицентар B_1 неких $0<k<n$ погодно изабраних тачака и доделити му тежину која је једнака збиру тежина полазних k тачака и слично одредимо барицентар B_2 преосталих $n-k$ тачака, а затим барицентар полазне фамилије од n тачака можемо одредити као барицентар за тачке B_1 и B_2 са одговарајућим тежинама.

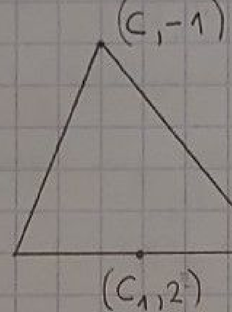
Прво тачке $(B,\frac{1}{4})$ и $(C,\frac{1}{4})$ заменимо са њиховим тежиштем (јер је $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$) A_1 што је заправо средиште дужи BC и доделимо му тежину $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. ← $\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1B}+\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1C}=\vec{0}$, $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{BA_1}$ $\Rightarrow$ $A_1=S(BC)$

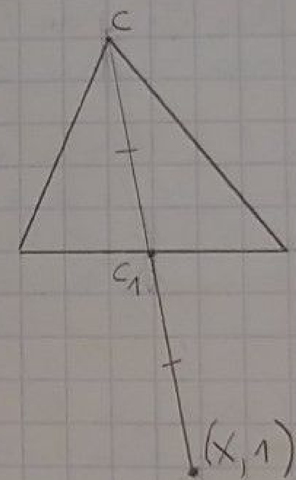
Да бисмо одредили барицентар полазне фамилије од 3 тежинске тачке, довољно је још да одредимо барицентар за $(A, \frac{1}{2})$ и $(A_1, \frac{1}{2})$ што ће бити $S = S(AA_1)$ јер $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, и придружена маса јој је $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

2. Одредити барицентар тачака A, B и C ако су њихове масе редом $1, 1, -1$.

✱ <u>I начин</u>







Заменимо прво тачке $(A,1)$ и $(B,1)$ са њиховим барицентром C_1 што је заправо средиште дужи AB јер $1=1$.

Да бисмо одредили барицентар полазне фамилије од 3 тежинске тачке, довољно је да одредимо барицентар X за $(C,-1)$ и $(C_1,2)$.

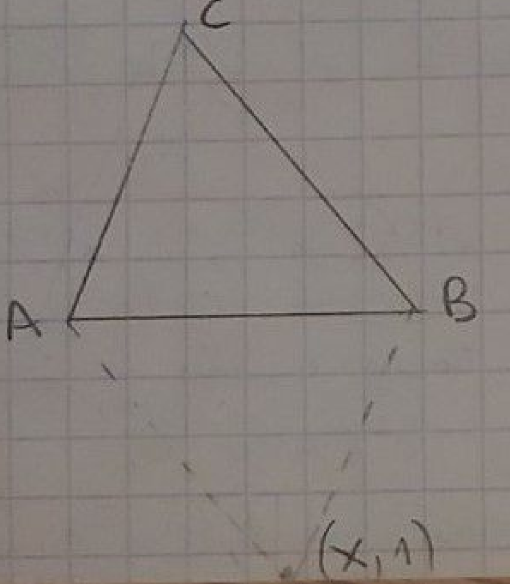
$-\overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XC_1} = \vec{0}$ тј. $\overrightarrow{XC} = 2\overrightarrow{XC_1}$, $\vec{0} = \overrightarrow{XC_1} + \overrightarrow{XC_1} - \overrightarrow{XC}$

$\vec{0} = \overrightarrow{XC_1} + \overrightarrow{CC_1} \Rightarrow \overrightarrow{XC_1} = \overrightarrow{C_1C}$ па је тражени барицентар тачка X симетрична тачки C у односу на тачку C_1 и додељујемо му тежину $-1+2=1$.

II начин

За барицентар X дате фамилије од 3 тежинске тачке $(A,1)$, $(B,1)$ и $(C,-1)$ важи $\overrightarrow{CX} = 1\cdot\overrightarrow{CA} + 1\cdot\overrightarrow{CB} + (-1)\cdot\overrightarrow{CC}$,

$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ па одмах добијамо да је тачка X четврто теме паралелограма разапетог са $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ и додељујемо јој тежину $1+1+(-1)=1$.



из формуле из теоријског увода

$$\overrightarrow{CX} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overrightarrow{CA_i}$$

$\alpha_1 = 1 \quad A_1 = A$

$\alpha_2 = 1 \quad A_2 = B$

$\alpha_3 = -1 \quad A_3 = C$

③ Ако је $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $x \in \mathbb{F}^n$ и $b \in \mathbb{F}^m$ онда је решење система $Ax = b$ афини потпростор од $\mathbb{F}^n$.

⊛ $Ax = b$

$$\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{m \times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Довољно је доказати да је скуп решења прве једначине афини потпростор од $\mathbb{F}^n$, аналогно бисмо доказали да је решење сваке друге једначине такође један афини потпростор па би решење горњег система био афини потпростор као пресек афиних потпростора. Довољно је доказати да ако су решења потпростора. Довољно је доказати да ако су решења прве једначине датог система једначина: $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}), \dots, X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ са придруженим тежинама $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ таквим да је $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, да онда $X = \alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} + \dots + \alpha_k X^{(k)}$ такође представља решење прве једначине тј. да је $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$.

То следи из

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{11}\cdot(\alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_1^{(2)} + \dots + \alpha_k x_1^{(k)}) + a_{12}\cdot(\alpha_1 x_2^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(2)} + \dots + \alpha_k x_2^{(k)}) + \dots + a_{1n}(\alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)} + \dots + \alpha_k x_n^{(k)}) =$$

$$= \alpha_1\cdot(a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + \dots + a_{1n}x_n^{(1)}) + \alpha_2\cdot(a_{11}x_1^{(2)} + a_{12}x_2^{(2)} + \dots + a_{1n}x_n^{(2)}) + \dots + \alpha_k\cdot(a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)}) =$$

$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$ су решења прве једначине па су изрази у заградама једнаки b_1.

$$= \alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_1 + \dots + \alpha_k \cdot b_1 =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)\cdot b_1 = 1 \cdot b_1 = b_1$$

Чиме је на основу већ објашњеног доказано да је решење датог система афини потпростор од $\mathbb{F}^n$.

(4.) Ако је $A = V_{af}$ афинизација векторског простора V над пољем $\mathbb{K}$, доказати да је скуп $\Pi = \{\alpha u + (1-\alpha) v : \alpha \in \mathbb{K}\}$ најмањи афини потпростор од A који садржи дате тачке u и v.

(*) Докажимо прво да је скуп Π афини потпростор од A који садржи тачке u и v. За $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ добијамо да $v \in \Pi$ и $u \in \Pi$.

Да бисмо доказали да је Π афини потпростор довољно је доказати да је Π затворен за барицентре. Нека имамо фамилију тежинских тачака из скупа Π које су облика $(a_1 u + (1-a_1) v, \alpha_1)$, $(a_2 u + (1-a_2) v, \alpha_2), \dots, (a_n u + (1-a_n) v, \alpha_n)$ при чему је $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Тада је афина комбинација $\alpha_1 \cdot (a_1 u + (1-a_1) v) + \alpha_2 (a_2 u + (1-a_2) v) + \dots + \alpha_n (a_n u + (1-a_n) v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a_i \, u + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (1-a_i) v$ из Π јер $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a_i \in \mathbb{K}$ као збир елемената из $\mathbb{K}$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (1-a_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$. Дакле, Π је афини потпростор.

Приметимо да П можемо видети и као скуп барицентара тачака (u, α) и $(v, 1-\alpha)$ за $\alpha \in \mathbb{K}$. Како сваки афини потпростор од A који садржи дате тачке u и v због затворености за барицентре мора садржати скуп П, онда је П најмањи афини потпростор од A који садржи дате тачке u и v.

5. Доказати да два тротеменика (A,B,C) и (P,Q,R) у афином простору над пољем $\mathbb{R}$ имају исто тежиште ако и само ако је $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=0$.

(*) T_1 – тежиште тротеменика (A,B,C)

$\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ где је O нека произвољна фиксирана тачка

T_2 – тежиште тротеменика (P,Q,R)

$$\overrightarrow{OT_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OR}$$

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OR} - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OC}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}\right) \quad ☆$$

Пр. тежишта (A, B, C) и (P, Q, R) имају иста тежишта $\Longleftrightarrow$

$T_1 = T_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{T_1T_2} = \vec{0} \overset{\star}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \vec{0}$

6. Ако су P, Q, R тим редом барицентри пондерисаних тачака (B,α) и (C,β), (C,α) и (A,β), (A,α) и (B,β), доказати да тачке A, B, C и P, Q, R имају исто тежиште.

$\star$ O – произвољна фиксирана тачка

$\overrightarrow{OP} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OC}$ јер је P барицентар пара тачака (B,α) и (C,β)

$\overrightarrow{OQ} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OC} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}$ јер је Q барицентар пара тачака (C,α) и (A,β)

$\overrightarrow{OR} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$ јер је R барицентар пара тачака (A,α) и (B,β)

T_1 – тежиште тачака A, B, C $\Rightarrow \overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

T_2 – тежиште тачака P, Q, R $\Rightarrow \overrightarrow{OT_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OR}$

$$\overrightarrow{OT_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OC}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OC} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\cdot\overrightarrow{OC} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OT_1}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OT_2} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{T_1T_2} = \vec{0} \Longleftrightarrow T_1 = T_2$

Овим смо доказали да тачке A, B, C и P, Q, R имају исто тежиште.

(7.) Нека су A и B фиксиране тачке и Π потпростор афиног простора $\mathcal{A}$. Ако је T_P тежиште тачака A, B, P тада је и скуп $\Gamma = \{T_P : P \in \Pi\}$ један потпростор од $\mathcal{A}$.

(*) Да бисмо доказали да је Γ афини потпростор од $\mathcal{A}$ довољно је доказати да је тај скуп Γ затворен за барицентре. Нека имамо систем од n тежишних тачака $(T_{P_1}, \alpha_1), (T_{P_2}, \alpha_2), \dots (T_{P_n}, \alpha_n)$ при чему је $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ и $P_1, \dots, P_n \in \Pi$. Доказујемо да тада њихова афина комбинација $\alpha_1 T_{P_1} + \alpha_2 T_{P_2} + \dots + \alpha_n T_{P_n} \in \Gamma$, тј. да је то тежиште A, B, P за неко $P \in \Pi$. Нека је O произвољна фиксирана тачка. Тада како су $T_{P_1}, T_{P_2}, \dots, T_{P_n}$ тежишта тачака A, B и P_i редом за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, можемо написати:

$$\overrightarrow{OT_{P_1}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP_1}$$

$$\overrightarrow{OT_{P_2}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP_2}$$

$$\vdots$$

$$\overrightarrow{OT_{P_n}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP_n}$$

Приметимо да је

$$\alpha_1 \overrightarrow{OT_{P_n}} + \alpha_2 \overrightarrow{OT_{P_2}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OT_{P_n}} = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP_1}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP_2}\right)$$

$$+ \dots + \alpha_n \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\left(\alpha_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OP_n}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\left(\alpha_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OP_n}\right)$$

одакле ако означимо $\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OP_n}$ и $\overrightarrow{OT} = \alpha_1 \overrightarrow{OT_{P_1}} + \alpha_2 \overrightarrow{OT_{P_2}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OT_{P_n}}$

добијамо да је $T = \alpha_1 T_{P_1} + \alpha_2 T_{P_2} + \dots + \alpha_n T_{P_n}$ тежиште тачака A, B и P.

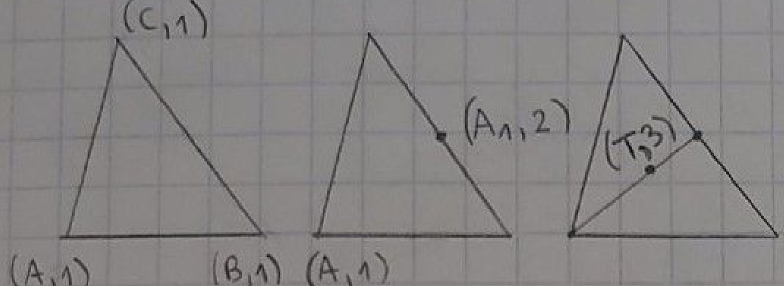
при чему $P \in \Pi$ јер је $P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$ и Π је по претпоставци задатка

потпростор афиног простора $\mathcal{A}$. Зато $\alpha_1 T_{P_1} + \alpha_2 T_{P_2} + \dots + \alpha_n T_{P_n} \in \Gamma$ чиме

смо доказали да је Γ један потпростор од $\mathcal{A}$.

8. Применом теорије о барицентрима доказати да се тежишне дужи троугла секу у тачки која их дели у односу 2:1.

*



тежишне дужи троугла ABC се не могу поклопити јер ако би се нпр. AA_1 и BB_1 поклопиле, онда би тачке A, B, A_1 и B_1 биле колинеарне, а на тој правој би била и тачка $\{C\} = AB_1 \cap BA_1$ што није могуће јер је ABC троугао

Нека су темена троугла тежинске (пондерисане) тачке $(A,1)$, $(B,1)$ и $(C,1)$. Тежиште овог система од три тежинске тачке је јединствена тачка T а на основу тврђења доказаног у задатку 1 то јединствено тежиште можемо добити на разне начине. Један од њих је да тачке $(B,1)$ и $(C,1)$ заменимо њиховим тежиштем $(A_1,2)$ где је $A_1 = S(BC)$ и онда је тачка T барицентар тачака $(A,1)$ и $(A_1,2)$ и за њу важи

$1\cdot\overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TA_1} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1} \Rightarrow$ тачка T дели тежишну дуж AA_1 у односу $2:1$. Аналогно би се доказало да тачка T дели и тежишне дужи BB_1 и CC_1 у односу $2:1$ што значи да се тежишне дужи троугла секу у тачки која их дели у односу $2:1$.

9. Ако су $\Pi = A + \vec{U}$ и $\Gamma = B + \vec{W}$ било који потпростори афиног простора $\mathcal{A}$ и $B = A + v$, директриса афиног омотача $\langle \Pi \cup \Gamma \rangle$ њихове уније је сума потпростора $\vec{U}$, $\vec{W}$ и $\mathcal{L}(v)$.

скица

* Означимо афини омотач $\langle \Pi \cup \Gamma \rangle = \Sigma$. Како је афини омотач $\langle \Pi \cup \Gamma \rangle$ најмањи афини простор који садржи потпросторе Π и Γ, онда на основу облика афиног потпростора тј. начина његовог представљања преко векторског потпростора знамо да $\vec{\Pi} < \vec{\Sigma}$, $\vec{\Gamma} < \vec{\Sigma}$ и $\mathcal{L}(\vec{AB}) = \mathcal{L}(v) < \vec{\Sigma}$ (тачке A и B су у афином омотачу Σ па је ту и права AB као скуп свих барицентара тачака A и B). Одавде имамо да је $\vec{U} + \vec{W} + \mathcal{L}(v) < \vec{\Sigma}$. Једнакост $\vec{U} + \vec{W} + \mathcal{L}(v) = \vec{\Sigma}$ важи јер је $\Sigma = \langle \Pi \cup \Gamma \rangle$ афини омотач што по дефиницији значи да је то најмањи афини простор који садржи Π и Γ.

10. Ако афини потпростори $\Pi = A + \vec{U}$ и $\Gamma = B + \vec{W}$ имају бар једну заједничку тачку, доказати да је тада

$$\dim \langle \Pi \cup \Gamma \rangle = \dim \Pi + \dim \Gamma - \dim \langle \Pi \cap \Gamma \rangle$$

скица

(*) Нека је $S \in \Pi \cap \Gamma$ заједничка тачка афиних потпростора Π и Γ. Тада се они могу записати као $\Pi = S + \vec{\Pi}$ и $\Gamma = S + \vec{\Gamma}$. На основу задатка 9. имамо $\overrightarrow{\langle \Pi \cup \Gamma \rangle} = \vec{\Pi} + \vec{\Gamma} + \mathcal{L}(\overrightarrow{SS})$ тј. $\overrightarrow{\langle \Pi \cup \Gamma \rangle} = \vec{\Pi} + \vec{\Gamma}$ одакле је $\dim \langle \Pi \cup \Gamma \rangle = \dim \overrightarrow{\langle \Pi \cup \Gamma \rangle} =$

$$= \dim(\vec{\Pi} + \vec{\Gamma}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Грасманова формула}}}{=} \dim \vec{\Pi} + \dim \vec{\Gamma} - \dim \vec{\Pi} \cap \vec{\Gamma} = \dim \Pi + \dim \Gamma - \dim \langle \Pi \cap \Gamma \rangle$$

11. Ако две разне равни Π и Γ у афином простору $\mathcal{A}$ димензије 3 имају бар једну заједничку тачку, доказати да њихов пресек $\Pi \cap \Gamma$ мора бити права. Да ли то важи ако је $\dim \mathcal{A} = 4$?

(*) Нека је $\Pi = A + U$ и $\Gamma = A + W$ где је $A \in \Pi \cap \Gamma$ која постоји по услову задатка. Како су Π и Γ две разне равни у афином простору $\mathcal{A}$ димензије 3 то имамо $\dim U = 2$ и $\dim W = 2$

На основу Грасманове формуле је

$$\dim(U+W) = \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim U} + \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim W} - \dim(U \cap W)$$

Како је $U + W < \vec{A}$ и $\dim \vec{A} = \dim \mathcal{A} = 3$ то имамо две могућности:

1) $\dim(U+W) = 2$ и $\dim(U \cap W) = 2$

Тада имамо $U \cap W < U, W < U + W$ и $2 = \dim(U \cap W) = \dim U = \dim(U+W)$

па $U = W \Rightarrow \Pi = A + U = A + W = \Gamma$ што је у контрадикцији са условом задатка да су Π и Γ две разне равни.

2) $\dim(U+W) = 3$ и $\dim(U \cap W) = 1$

Тада имамо да је пресек $\Pi \cap \Gamma$ права што се и тражило.

Ако је $\dim \mathcal{A} = 4$ онда пресек две равни може бити тачка.

Пример у $\mathbb{R}^4$: $Oe_1e_2e_3e_4$

$\Pi = Oe_1e_2$ $\quad \Gamma = Oe_3e_4$ су две разне равни чији је пресек

$\Pi \cap \Gamma = \{O\}$

(12.) У четвородимензионалном простору одредити међусобни положај равни α: $x_1 + x_2 + 1 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$ и β: $x_1 = 1+t$, $x_2 = 2+s$, $x_3 = t-2s$, $x_4 = 1+t-s$, $t, s \in \mathbb{R}$.

(*) α: $x_1 + x_2 + 1 = 0$

$x_3 - x_4 = 0$

β: $x_1 = 1+t$

$x_2 = 2+s$

$x_3 = t-2s$

$x_4 = 1+t-s$

Раван β је представљена помоћу параметара t и s.

Помоћу параметарских једначина желимо да представимо и раван α.