3.7. Паскалова и Бриј順оншонова теорема

↙ имамо више тачака (од тангенти) на конике

<u>Паскалова теорема:</u> Три сецишта наспрамних страница простог шестотеменика уписаног у недегенерисану конику су колинеарне тачке.

↙ имамо више тангенти на конику

<u>Бријаншонова теорема:</u> Три спојнице наспрамних темена простог шестостраника описаног око недегенерисане конике су конкурентне праве.

- Често примењујемо граничне случајеве тј. неке елементе можемо дуплирати. Ако смо дуплирали тачку онда је одговарајућа спојница тангента у тој тачки, а ако смо дуплирали тангенту онда је одговарајуће сециште додирна тачка те тангенте и конике.

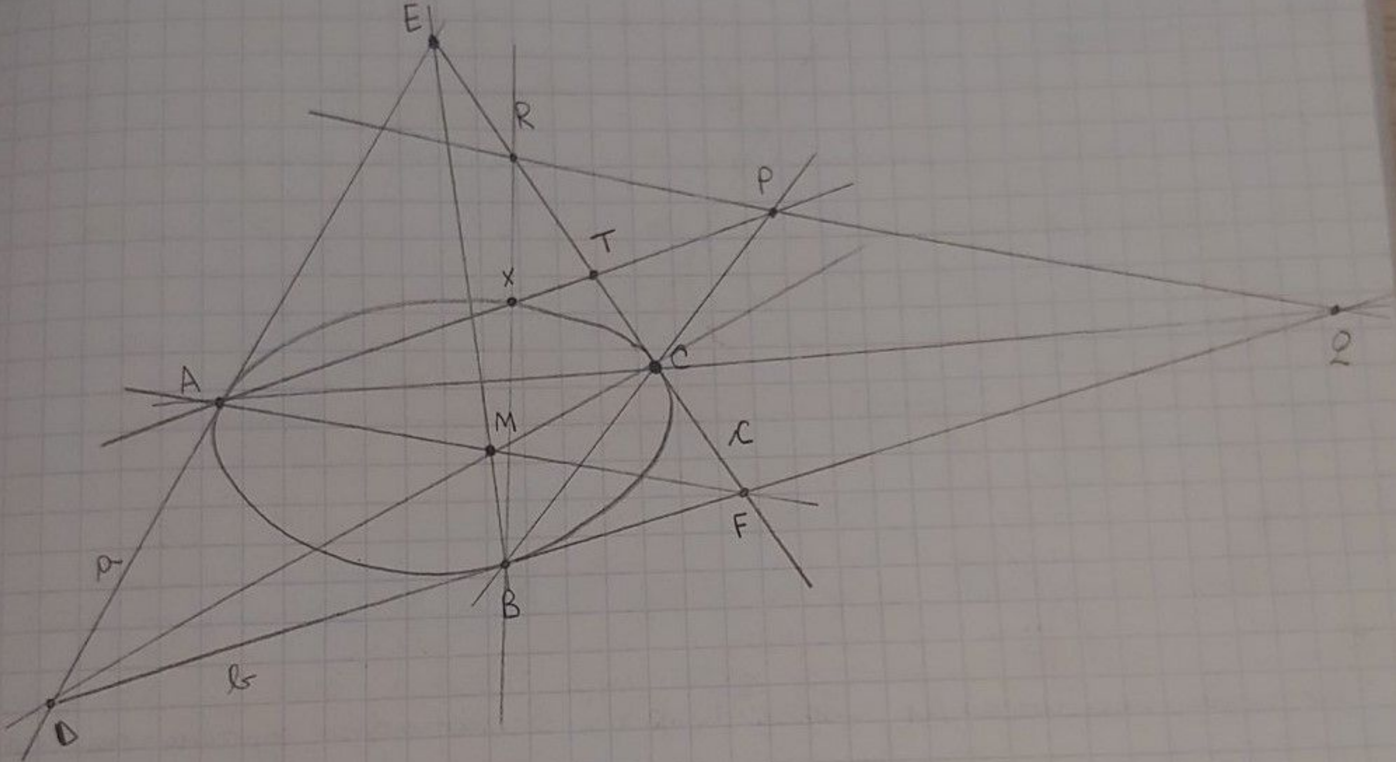
Тип конике одређује број пресека са бесконачном правом.

Елипса нема пресеке са u_∞. Парабола има тачно једну бесконачну тачку па бесконачну праву u_∞ можемо третирати као познату тангенту. Додирна тачка те тангенте са параболом је бесконачна тачка осе параболе. Тангента у темену параболе је нормална на осу те параболе. Хипербола има две бесконачне тачке и то су бесконачне тачке њених асимптота. Ако нам је дата асимптота онда су нам дате две информације о коници: та асимптота је тангента и њена бесконачна тачка је тачка конике.

Ако нам је познат центар или оса конике онда нове тачке или тангенте конике можемо добити једноставном централном или осном симетријом познатих тачака или тангенти.

(3.35.) Дате су тангенте a, b, c и додирне тачке $A \in a$, $B \in b$ недегенерисане конике Γ. За дату тачку $T \in c$ одредити другу пресечну тачку праве AT и конике Γ.

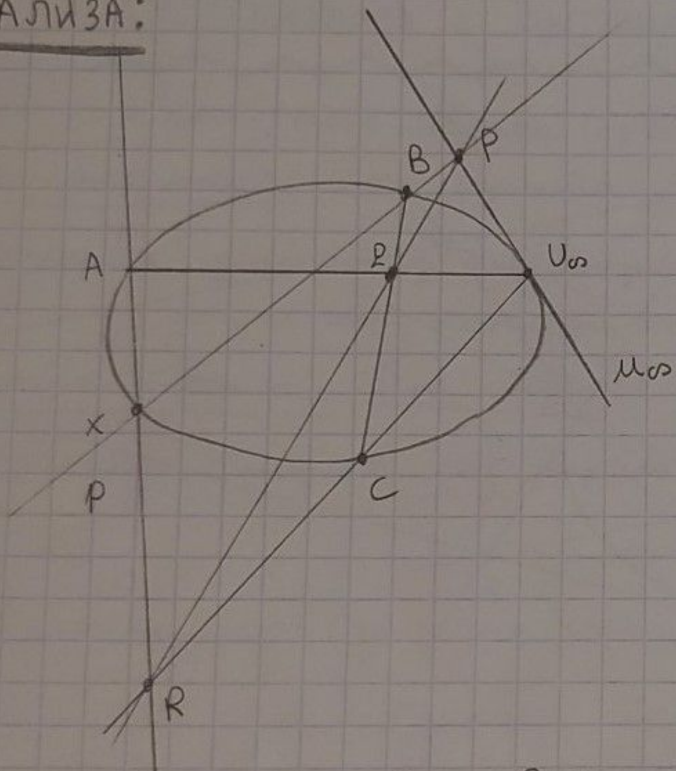
(*)



Нека је $D := a \wedge b$, $E := a \wedge c$, $F := b \wedge c$ и C додирна тачка тангенте c. Циљ нам је да прво нађемо тачку C и зато ћемо применити Бријаншонову теорему на прости тангентни тространик $\underline{aa}\,b\underline{bc}\,c$ која нам даје да су праве $A \vee (b \wedge c) = AF$, $(a \wedge b) \vee C = DC$ и $B \vee (c \wedge a) = BE$ конкурентне и нека се оне секу у тачки M. Тада је $M = AF \wedge BE$ и $C = c \wedge MD$ (јер секу у тачки M. Тада је $M = AF \wedge BE$ и $C = c \wedge MD$ (јер $C \in c$ и тачке C, D и M су колинеарне). Како смо сада добили и тачку C са конике, можемо применити Паскалову теорему на прост гранични четворотеменик $AXBBCC$ где је X тражена друга пресечна тачка праве AT и конике Γ и на основу ње имамо да су тачке $P := AX \wedge BC = AT \wedge BC$, $R = XB \wedge c$ и $Q = b \wedge CA$ колинеарне. Одавде можемо добити тачку $R = PQ \wedge c$, а затим и тражену тачку $X = AT \wedge BR$ (јер $X \in AT$ и тачке R, X, B су колинеарне).

3.38. Дате су тачке A, B, C параболе и правац σ' њене осе као и права $p \ni A$. Конструисати другу пресечну тачку праве p и параболе.

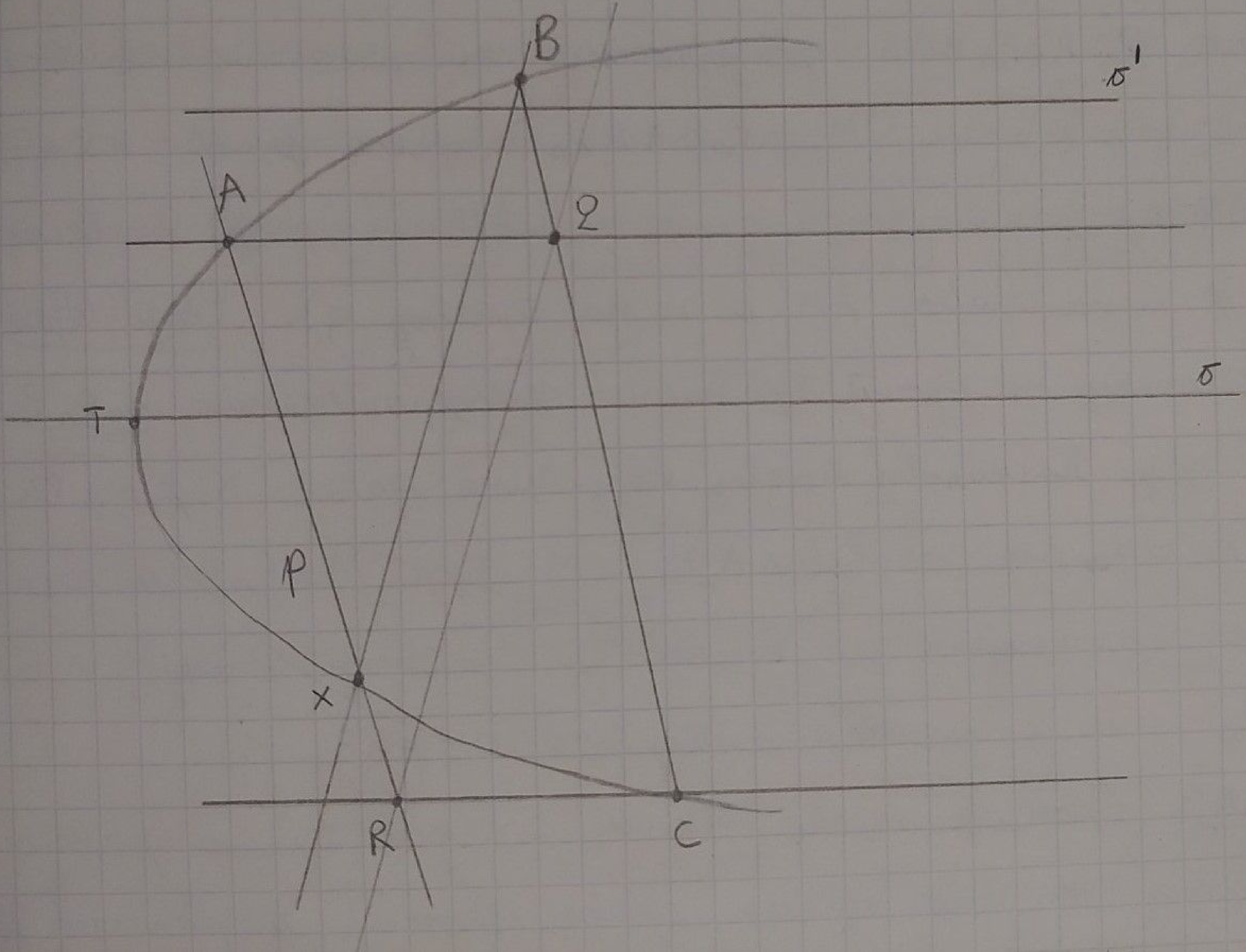
АНАЛИЗА:



Карактеристика параболе Γ је да бесконачна права u_∞ додирује Γ тј. да је u_∞ тангента на Γ у некој тачки U_∞. Та тачка се налази на оси σ параболе, тј. $U_\infty \in \Gamma \cap \sigma$ па је $\Gamma \cap \sigma = \{T, U_\infty\}$ где је T теме параболе. Како је дат правац осе $\sigma' \parallel \sigma$ то је $U_\infty = \sigma \wedge \sigma'$. Применом Паскалове теореме на прост гранични петотеменик $U_\infty U_\infty A X B C$ (где је X тражена друга пресечна тачка

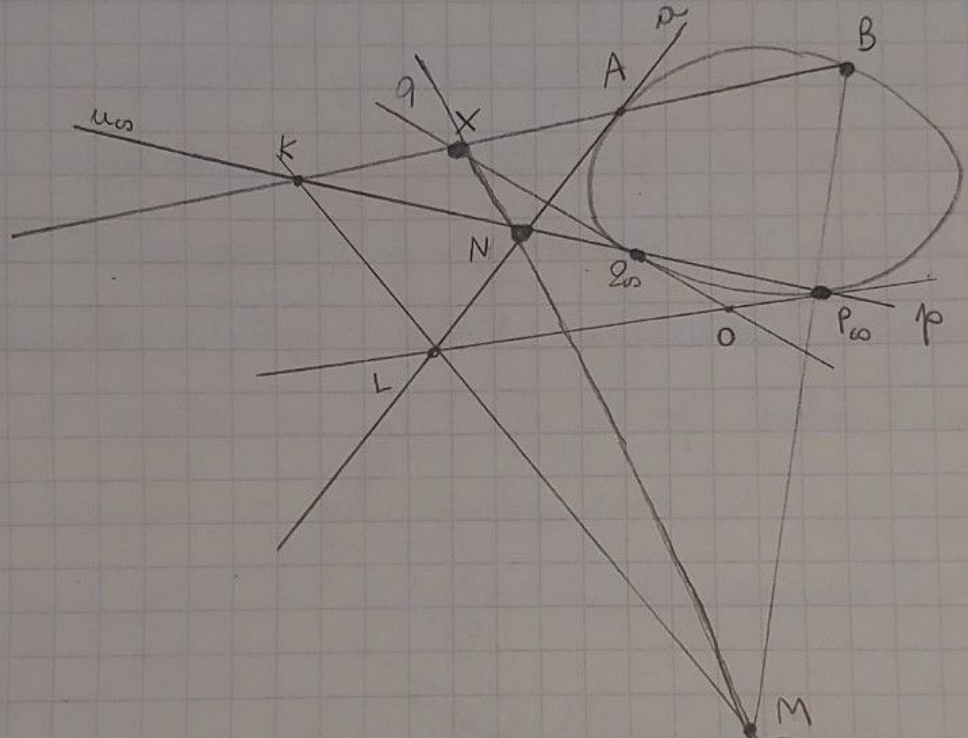
$U_\omega = \sigma \wedge \sigma'$. Применом Паскалове теореме на прост гранични петотеменик $\underline{U_\omega U_\omega} A \underline{X B} C$ (где је X тражена друга пресечна тачка праве p и параболе Γ) добијамо да су тачке $P := u_\omega \wedge XB$, $Q := U_\omega A \wedge BC$ и $R := AX \wedge CU_\omega = p \wedge CU_\omega$ колинеарне. Одавде је $P = QR \wedge u_\omega$ и тражена тачка $X = BP \wedge p$ (јер $X \in p$ и тачке P, B и X су колинеарне).

<u>КОНСТРУКЦИЈА:</u> Конструишемо тачку Q као пресек праве BC и праве кроз тачку A која је паралелна са σ', а затим тачку R као пресек праве p и праве кроз тачку C паралелне са σ'. Тачку X конструишемо као пресек праве p и праве кроз тачку B паралелне са QR (јер $X = BP \wedge p$ и $P = QR \wedge u_\omega$ у анализи).


B
σ'
A
Q
σ
T
P
X
R
C

3.39. Дате су тачке A и B и праве a и p. Конструисати центар хиперболе Γ ако $A, B \in \Gamma$ при чему је p асимптота, док је a тангента у A.

*** АНАЛИЗА:**

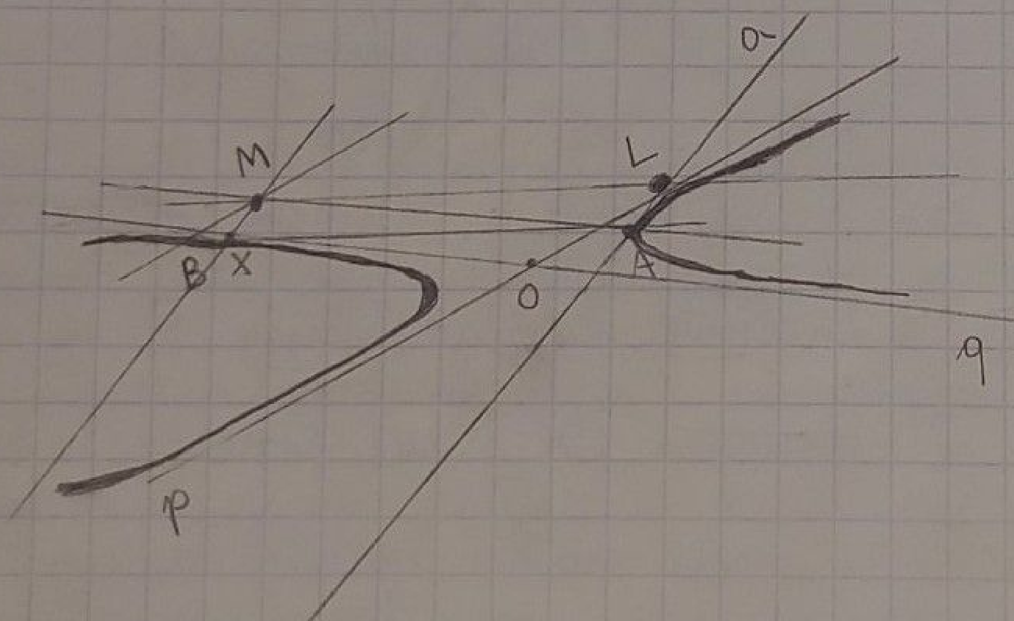


Нека је q друга асимптота хиперболе Γ. Тада асимптоте p и q хиперболе Γ представљају тангенте које додирују Γ у бесконачним тачкама P_∞ и Q_∞ док се центар O хиперболе налази у њиховом пресеку $O = p \wedge q$. Дакле, треба наћи другу асимптоту q хиперболе Γ. Применом Паскалове теореме на прост гранични

четворотеменик $Q_\infty P_\infty P_\infty B A A$ добијамо колинеарне тачке $K := Q_\infty P_\infty \wedge BA$ 3.
$= u_\infty \wedge BA$, $L := p \wedge a$ и $M := P_\infty B \wedge A Q_\infty$ одакле је $M = KL \wedge P_\infty B$
па је $Q_\infty = AM \wedge u_\infty$ што значи да је $q \parallel AM$. (јер је Q_∞ бесконачна
тачка која је и на правој AM а и на правој q). Сада применимо
Паскалову теорему на прост гранични четворотеменик $Q_\infty Q_\infty P_\infty B A A$
и она нам даје Паскалову праву коју чине тачке $X := q \wedge BA$,
$N := Q_\infty P_\infty \wedge a = u_\infty \wedge a$ и $P_\infty B \wedge A Q_\infty = M$ (јер $M \in P_\infty B$ и тачке
Q_∞, A и M су колинеарне јер $Q_\infty \in AM$). Зато је $X = NM \wedge BA$
и $q = X Q_\infty$ па је центар хиперболе $O = p \wedge q$.

<u>КОНСТРУКЦИЈА:</u> Конструишемо тачку L као пресек правих p и a, тачку M као пресек праве кроз L паралелне AB и праве кроз B паралелне p (јер $M \in KL$ и K је бесконачна тачка праве AB јер је $K = Q_\infty P_\infty \wedge BA$ у анализи, а такође и $M \in P_\infty B$ и P_∞ је бесконачна тачка праве p). Конструишем

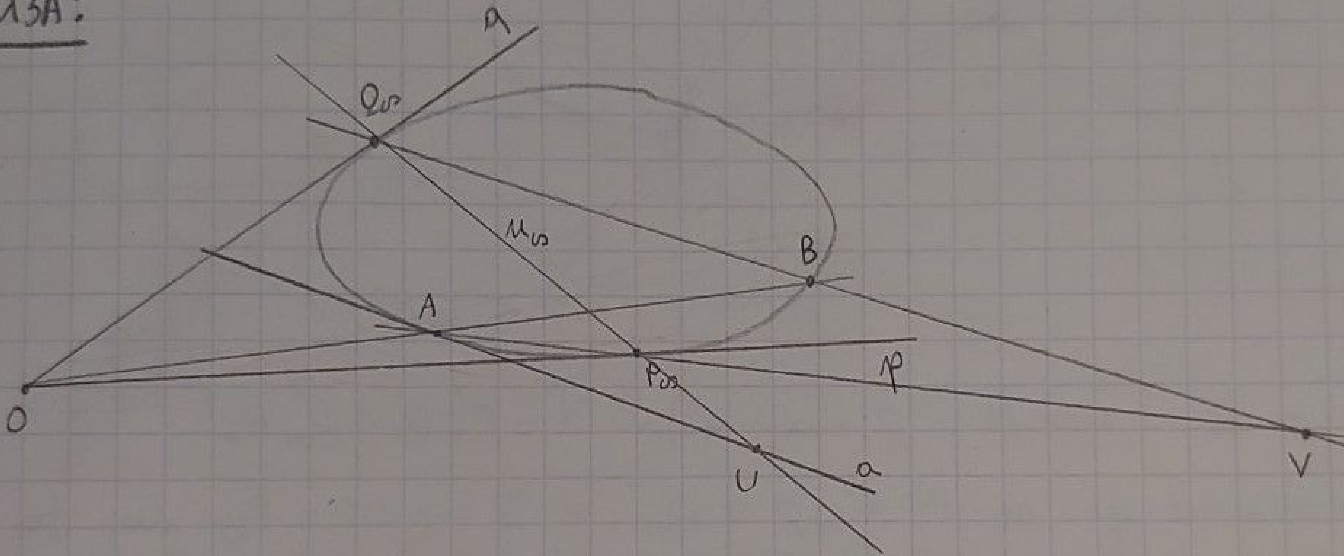
$M \in P_\infty B$ и P_∞ је бесконачна тачка праве p). Конструишемо тачку X као пресек праве BA и праве кроз M паралелне на a (јер у анализи $X \in BA$ и $X \in NM$, а N је бесконачна тачка праве a јер је $N = m_\infty \wedge a$), затим праву q која садржи тачку X (јер $X \in q$) и паралелна је са AM (јер смо у анализи имали $q \parallel AM$). Тражени центар O конструишемо као пресек правих p и q.



3.40. Дате су тачке A и O, као и праве a и p. Ако је A додирна тачка тангенте a на хиперболу, O центар те хиперболе, а p једна њена асимптота, одредити другу њену асимптоту.

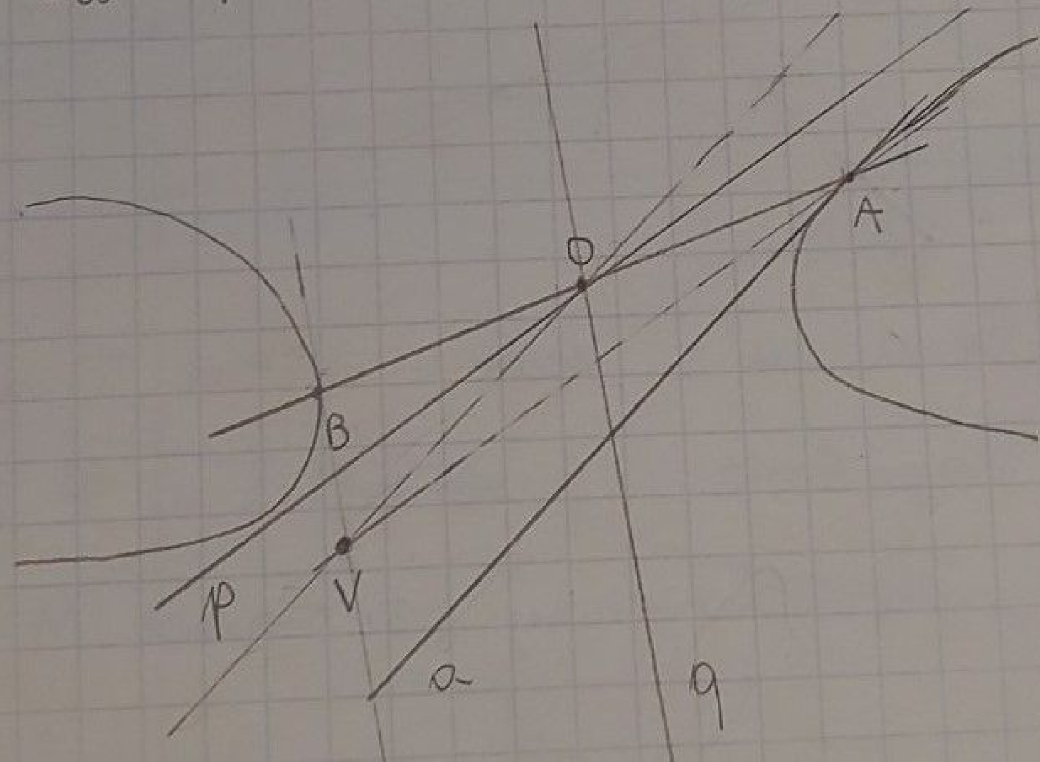
I начин (примена Паскалове теореме):

АНАЛИЗА:



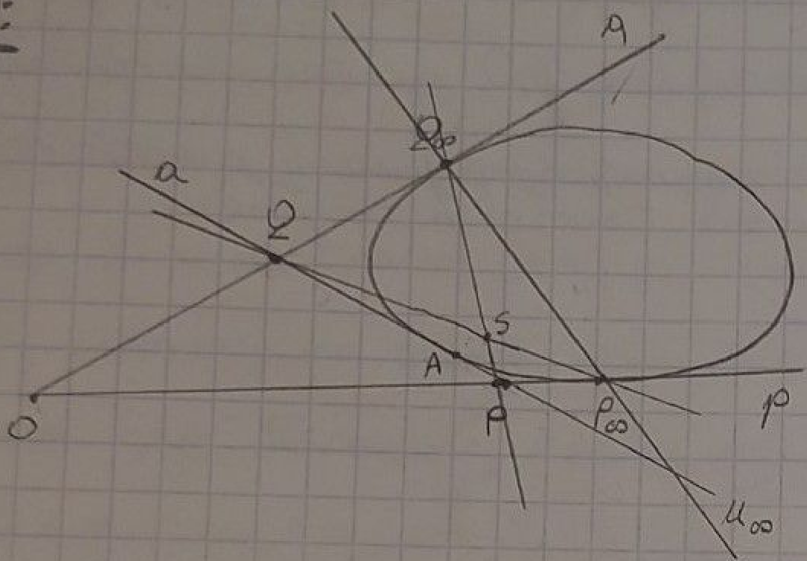
Тачка $B = S_O(A)$ тј. тачка симетрична тачки A у односу на O ($A \neq B \in AO \cap k(O, OA)$) је на коници. Нека је $P_\infty := p \wedge m_\infty$, $Q_\infty := q \wedge m_\infty$ где је q друга асимптота. Применом Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $P_\infty P_\infty A A B Q_\infty$ добијамо да су тачке $O = p \wedge AB$, $V = P_\infty A \wedge B Q_\infty$, $U = a \wedge m_\infty$ колинеарне одакле је $V = OU \wedge P_\infty A$, па је $Q_\infty = BV \wedge m_\infty$ и $q = OQ_\infty$.

КОНСТРУКЦИЈА: Конструишемо тачку $B = S_O(A)$, па тачку V као пресек праве кроз O паралелне са a (јер $V \in OU$ и $U = a \wedge u_\infty$) и праве кроз A паралелне p (јер $V \in P_\infty A$ и $P_\infty = p \wedge u_\infty$).
Праву q конструишемо као праву кроз O паралелну са BV (јер $O \in q$ и $Q_\infty \in q$ и $Q_\infty = BV \wedge u_\infty$ у анализи).



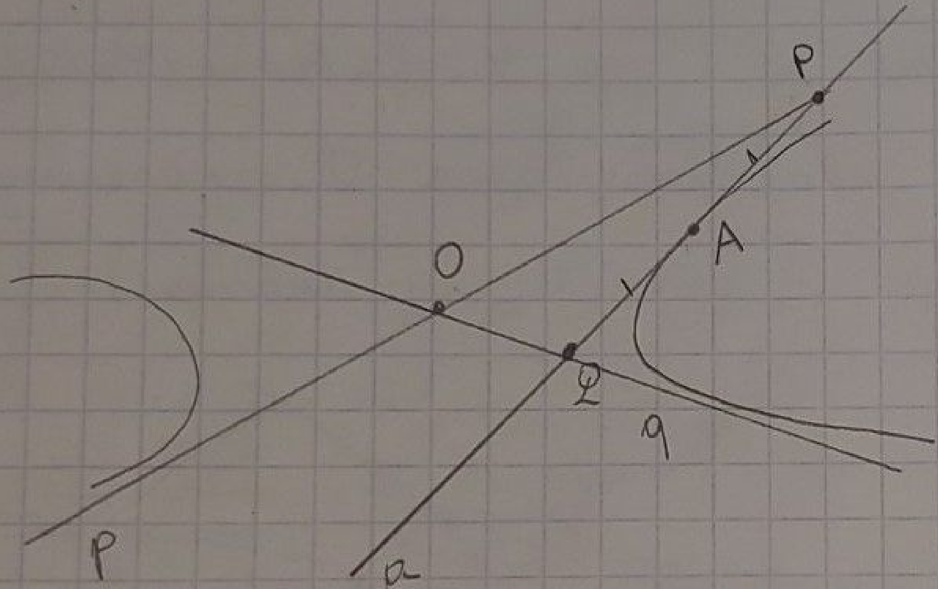
II начин (примена Бријаншонове теореме):

АНАЛИЗА:



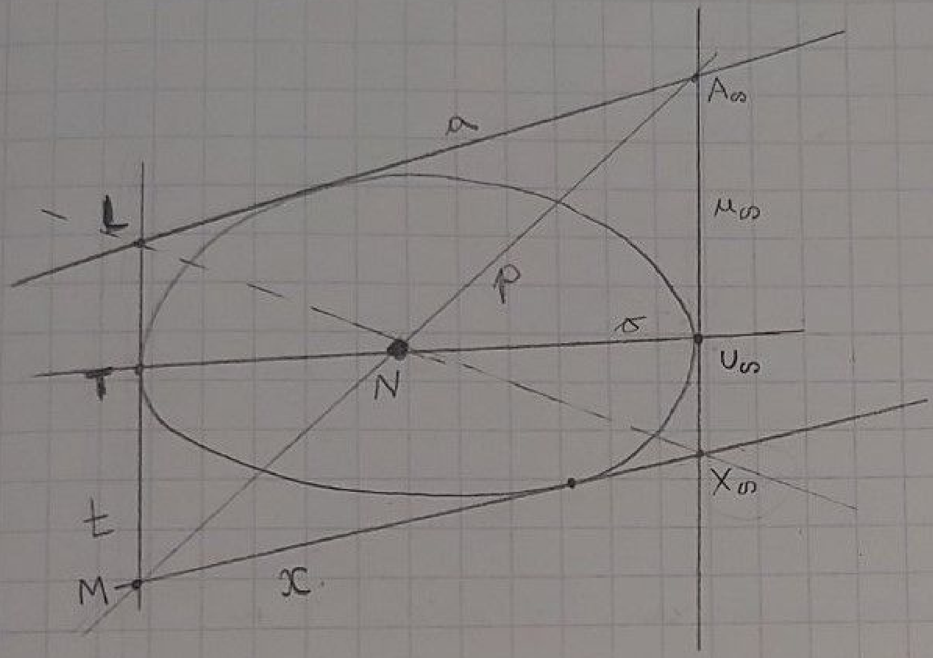
Нека је $P := a \wedge p$, $Q := a \wedge q$ и $S = P_\infty Q \wedge Q_\infty P$.
Приметимо да је $PS \wedge OQ = Q_\infty$ и $QS \wedge OP = P_\infty$ па је $PS \parallel OQ$ и $QS \parallel OP$ одакле је четвороугао $PSQO$ паралелограм.
Применом Бријаншонове теореме на прост гранични пространик $ppqqaa$ закључујемо да су праве $P_\infty Q$, OA и $Q_\infty P$ конкурентне. Како је $S = P_\infty Q \wedge Q_\infty P$ онда $S \in OA$ па је $A = OS \wedge PQ$, а како се дијагонале паралелограма полове то је $PA \cong QA$.

КОНСТРУКЦИЈА: Конструишемо тачку $P = a \cap p$, а затим и тачку $Q = S_A(P)$, тј. $P \neq Q \in a \cap k(A, AP)$. Конструишемо праву $q = OQ$.



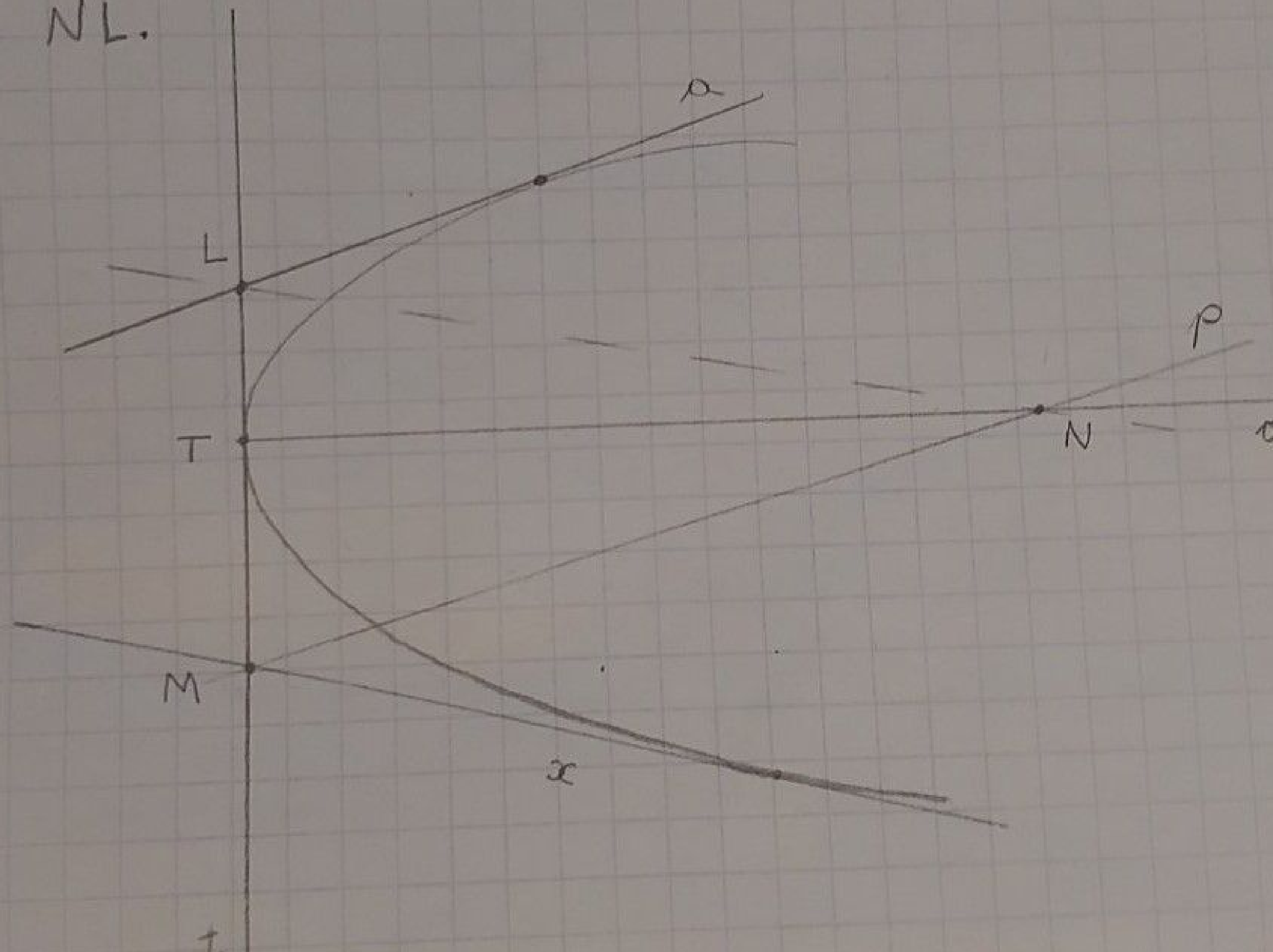
3.42. Дате су праве a и t, као и тачке T и M са праве t. Ако је T теме параболе и ако су a и t њене тангенте, конструисати другу тангенту из тачке M на ту параболу.

* АНАЛИЗА:



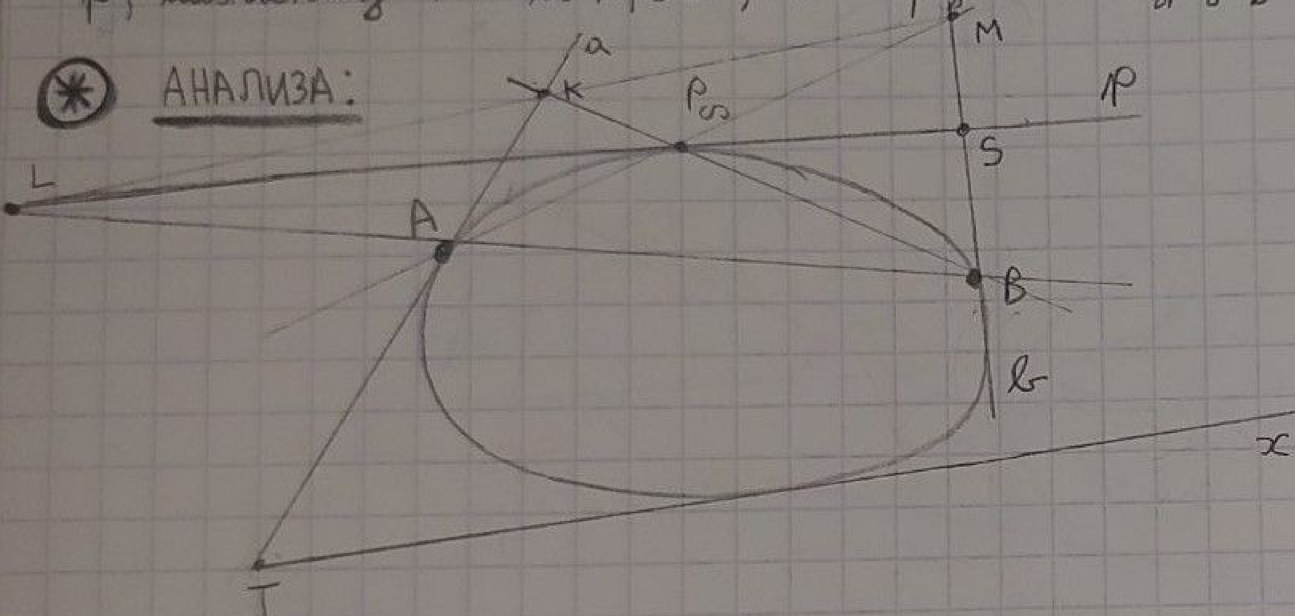
Означимо са x тражену тангенту из тачке M на конику и $L := a \wedge t$, $A_\infty := a \wedge u_\infty$, $X_\infty = x \wedge u_\infty$, $\{U_\infty\} = \Gamma \cap u_\infty$. Тачка U_∞ је бесконачна тачка осе параболе σ која је нормална на тангенту у темену T. Применом Бријаншонове теореме на прост гранични четвоространик $\underline{tx}\,\underline{u_\infty u_\infty a}$ добијамо конкурентне праве $\sigma = TU_\infty$, $p := (t \wedge x) \vee (u_\infty \wedge a) = MA_\infty$ и $\underline{q} := (x \wedge u_\infty) \vee (a \wedge t) = \underline{X_\infty L}$. За $N := \sigma \wedge p$ је зато $N \in q$ па је $X_\infty \in NL$ јер $q = X_\infty L$ па су N, X_∞ и L колинеарне. Тада је $x = MX_\infty$.

<u>КОНСТРУКЦИЈА:</u> Конструишемо праву σ кроз T нормалну на t, а затим праву p кроз тачку M која је паралелна са a. Конструишемо тачке $N = \sigma \wedge p$ и $L = a \wedge t$ и праву x кроз тачку M која је паралелна са NL.



3.45. Дате су тачке A, B, T и права p. Ако хипербола Γ има асимптоту p, тангенту AT и $A, B \in \Gamma$, конструисати другу тангенту из T на Γ.

✱ **АНАЛИЗА:**



скица уз анализу за примену Паскалове теореме и добијање тангенте $b \ni B$ на конику Γ

Нека је x друга тражена тангента из тачке T на конику Γ (права $a = TA$ је једна тангента из T на Γ). Желимо да применимо Бријаншонову теорему да бисмо одредили x, али како немамо довољно тангенти за примену прво ћемо одредити тангенту $b \ni B$. Нека је $P_\infty := p \wedge u_\infty$ додирна тачка асимптоте p и конике Γ. Применом Паскалове теореме на гранични шестотеменик $\underline{AA}\,\underline{BB}\,\underline{P_\infty P_\infty}$ добијамо колинеарне тачке $K = a \wedge BP_\infty$, $L = AB \wedge p$ и $M = b \wedge AP_\infty$, одакле $M = KL \wedge AP_\infty$ па је $b = MB$ (јер $B \in b$ и $M \in b$).

Применом Бријаншонове теореме на гранични четворотеменик $\underline{a}\,a_{\infty}\,x\,p\,\underline{p}_{\infty}\,b$ добијамо конкурентне праве AP_{∞}, $T \vee \overbrace{(p \wedge b)}^{S}$ и $\overbrace{(x \wedge p)}^{V} \vee \overbrace{(a \wedge b)}^{R}$.

Нека је $p \wedge b = S$ и $a \wedge b = R$, $AP_{\infty} \wedge TS = Q$. Тада $V = p \wedge RQ \in x$ (јер $Q \in (x \wedge p) \vee R$ тј. x, p и RQ су конкурентне) па је $x = TV$.

КОНСТРУКЦИЈА: Конструишемо тачку K као пресек праве $a = AT$ и праве кроз тачку B паралелне са p, а затим тачку $L = AB \wedge p$. Затим конструишемо тачку M као пресек праве KL и праве кроз A паралелне са p и праву $b = MB$. Конструишемо тачку $S = p \wedge b$ и $R = a \wedge b$ и тачку Q као пресек праве TS и праве кроз A паралелне са p, а затим тачку $V = p \wedge RQ$ и праву $x = TV$.