0. Увод

Пројективна геометрија — кратак историјски преглед најзначајнијих догађаја за развој ове математичке дисциплине:

- рана ренесанса у Италији
  - италијански архитекта Брунелески открио геометријску перспективу
  - италијански сликар Алберти истраживао елементе перспективе
- тридесете године 17. века у Француској
  - француски математичари Декарт и Ферма открили координате
  - Дезарг написао књигу о перспективи и о конусним пресецима, увео појам бесконачно далеке тачке ← сматра се творцем пројективне геометрије

- Значајан допринос пројективној геометрији су дали и француски математичари Паскал, Ла Ир, Монж (издвојио нацртну геометрију као посебну математичку дисциплину), Понселе (изучавао је особине које остају инваријантне под пројекцијама и сматра се оснивачем модерне пројективне геометрије), Карно, Сервоа, Жергон, Бријаншон, Шал и немачки математичари Штаут, Пликер, Штајнер (систематски и синтетички изградио пројективну геометрију)

• двадесете године 19. века

Мебијус, Фојербах, Бобилије и Пликер увели хомогене координате независно једном од другог

• крај 19. века

- Хилберт написао „Основе геометрије"
- италијански математичари Фано и Пјери аксиоматски заснивали пројективну геометрију

1.1. Аксиоматски метод

Када заснивамо неку нову математичку теорију неке појмове морамо прихватити као основне и њих не дефинишемо.

Основне појмове делимо у две класе, на основне објекте (као што су тачке, праве, равни) и основне релације између тих објеката (инциденција, између, подударности).

Тврђење у аксиоматској теорији је исказ у којем се јављају само основни појмови теорије и логички појмови. Теорију заснивамо на основним тврђењима која не захтевају доказ и зовемо их аксиоме теорије. Тврђење важи ако је у питању аксиома или уколико је изведено из аксиома и тада кажемо да је оно теорема (или лема ако је њена сврха да установи значајан корак у доказу неке будуће теореме).

Свако окружење у којем основни појмови имају интерпретацију у којој све аксиоме теорије важе зовемо **модел** те теорије.

Битне особине аксиоматске теорије:

- **непротивречност** (не постоји неко тврђење за које су и оно и његова негација теореме у тој теорији)
- **независност** (свака од аксиома те теорије је независна тј не може се доказати нити оповргнути из осталих аксиома теорије)
- **потпуност** (свако тврђење у теорији или његова негација се могу доказати).
- **категоричност** (свака два модела теорије су изоморфна)

Пројективну геометрију равни заснивамо као аксиоматску теорију. Основни појмови су нам два основна скупа T и P.

T – скуп тачака које обележавамо великим словима латинице $A, B, C, \ldots$

P – скуп правих које обележавамо малим латиничним словима $a, b, c, \ldots$

Уводимо основну релацију $I \subseteq T \times P$ коју зовемо **релација инциденције**.

$A \, I \, p$ или $(A, p) \in I$ → тачка A је инцидентна са правом p

→ тачка A лежи на правој p

→ тачка A припада правој p

$p \, I \, A$ → права p је инцидентна са тачком A

→ права p пролази кроз тачку A

→ права p садржи тачку A

$A \not{I} \, p$ тачка A није инцидентна са правом p

Ако постоји заједничка права са којом су инцидентне неке тачке, онда за те тачке кажемо да су колинеарне.

Ако постоји заједничка тачка са којом су инцидентне неке праве, онда за те праве кажемо да су конкурентне.

1.2. Аксиоме пројективне равни

Аксиома 1 Постоји јединствена права која је инцидентна са две различите тачке.

За различите тачке A и B, јединствену праву (њену егзистенцију имамо из Аксиоме 1) која их садржи зовемо спојница тачака A и B и обележавамо са $A \vee B$. Тако добијамо операцију спајања која двема различитим тачкама додељује одговарајућу праву, њихову спојницу.

→ сваке две тачке су колинеарне

→ са две различите праве може бити инцидентна највише једна тачка

Деф Дуално тврђење неком тврђењу је тврђење које се добија заменом речи тачка и права у почетном тврђењу.

тачка ⟷ права

лежи на ⟷ пролази кроз

припада ⟷ садржи

колинеарно ⟷ конкурентно

Тврђење (**Принцип дуалности**) Ако је неко тврђење теорема, онда је њему дуално тврђење такође теорема.

Принцип дуалности важи ако и само ако је дуал сваке аксиоме валидан.

Да бисмо имали Принцип дуалности уводимо дуал Аксиоме 1 као нову аксиому.

Аксиома 2 Постоји јединствена тачка која је инцидентна са две различите праве.

→ сваке две различите праве се секу

За различите праве p и q јединствену тачку из Аксиоме 2 која им припада зовемо <u>сецииште</u> (пресечна тачка) правих p и q и обележавамо са $p \wedge q$. Тако смо добили <u>операцију сечења</u> која двема различитим правама додељује одговарајућу тачку, њихово пресечиште.

$T = P = I = \emptyset$ испуњавају обе аксиоме и зато нам је потребна аксиома која ће обезбедити егзистенцију основних објеката од којих можемо изградити теорију.

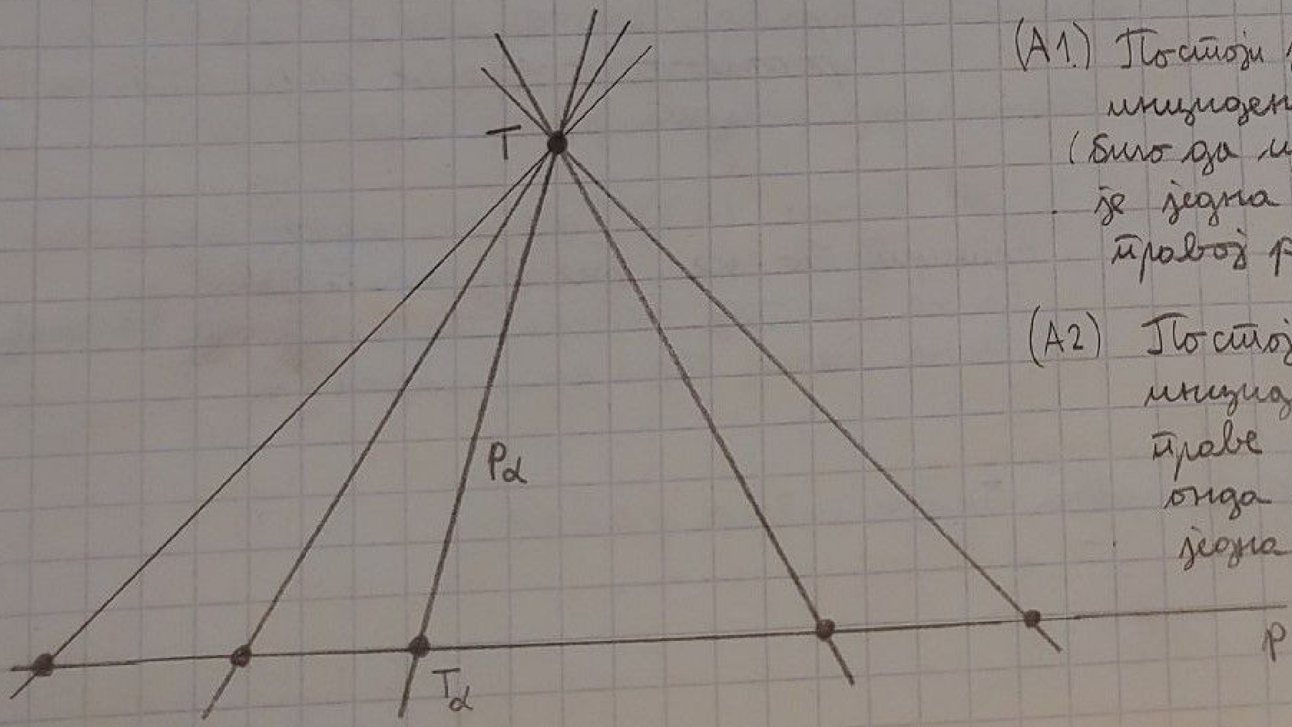
<u>Аксиома 3</u> Постоје четири тачке међу којима нема три колинеарне.

Уколико важе Аксиома 1 и Аксиома 2, али не и Аксиома 3 кажемо да је у питању <u>дегенерисана пројективна раван</u>, испоставља се да можемо издвојити две суштински различите фамилије.

Прва фамилија дегенерисаних равни представља се тачком T која није инцидентна са правом p, тако да постоји произвољан (не нужно коначан) скуп Λ и колинеарне тачке T_α за $\alpha \in \Lambda$ инцидентне са p, као и праве p_α које су спојнице тачке T са сваком од тачака T_α.

$$\mathcal{T} = \{T\} \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{T_\alpha\} \quad , \quad \mathcal{P} = \{p\} \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{p_\alpha\}$$

$$\mathcal{I} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{ (T, p_\alpha), (T_\alpha, p_\alpha), (T_\alpha, p) \}$$



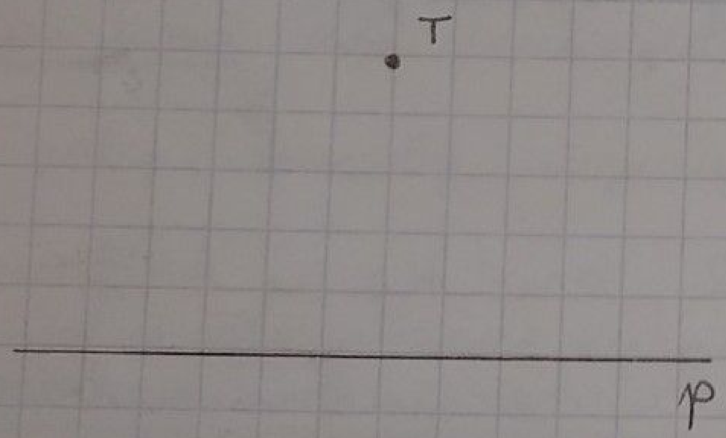
(A1) Постоји јединствена права која је инцидентна са две различите тачке. (било да су оне на правој p или је једна тачка T, а друга је на правој p)

(A2) Постоји јединствена тачка која је инцидентна са две различите праве (ако су то праве p_{α_1} и p_{α_2} онда је то тачка T, а ако је једна од њих права p, а друга права p_α та тачка је T_α).

Не важи (А3) Постоје четири тачке међу којима нема три колинеарне јер када посматрамо произвољне четири тачке оне су или све на правој p или су три од њих на правој p, а једна је тачка T, а у оба случаја имамо три колинеарне тачке

Дакле, то је заиста једна дегенерисана пројективна раван.

Специјално, за $\Lambda = \emptyset$ добијамо:

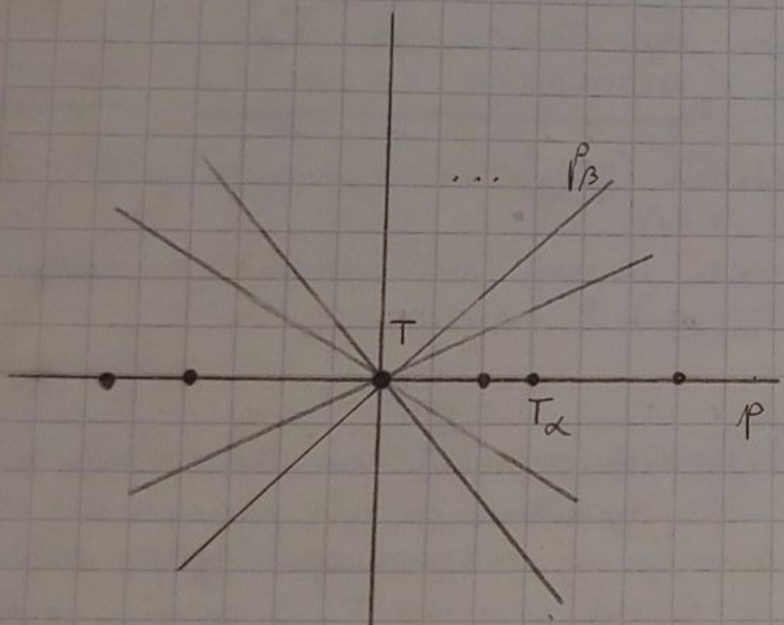


важе (А1) и (А2) јер немамо две различите тачке и немамо две различите праве, а не важи (А3) јер не постоје четири тачке.

Друга фамилија дегенерисаних равни представља се са два произвољна скупа индекса Λ и Σ, тако да су све тачке T_α за $\alpha \in \Lambda$ колинеарне, а све праве p_β за $\beta \in \Sigma$ конкурентне у некој од тачака T_α

$$\mathcal{T} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{T_\alpha\} \qquad \mathcal{P} = \bigcup_{\beta \in \Sigma} \{p_\beta\} \qquad \mathcal{I} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{(T_\alpha, p)\} \cup \bigcup_{\beta \in \Sigma} \{(T, p_\beta)\}$$

за неко $T \in \mathcal{T}$ и $p \in \mathcal{P}$



(A1) Постоји јединствена права која је инцидентна са две различите тачке. ← важи јер ма које две различите тачке узели права p их садржи

(A2) Постоји јединствена тачка која је инцидентна са две различите праве. ← важи јер ма које две различите праве узели тачка T лежи на њима

Не важи (A3) јер ма како изабрали четири тачке, оне су на правој p па не постоје четири тачке тако да међу њима нема три колинеарне

Дакле, то је заиста дегенерисана пројективна раван.

Специјално, $\Lambda = \emptyset \neq \Sigma$

$\mathcal{T} = \emptyset \qquad \mathcal{P} = \{p\} \qquad \mathcal{I} = \emptyset$

имамо само једну праву јер ако бисмо имали две различите праве, по аксиоми 2 постојала би јединствена тачка која је њихово сецишите, а $\mathcal{T} = \emptyset$

Специјално, $\Lambda \neq \emptyset = \Sigma$

$\mathcal{T} = \{T\} \qquad \mathcal{P} = \emptyset \qquad \mathcal{I} = \emptyset$

имамо само једну тачку јер ако бисмо имали две различите тачке, по аксиоми 1 постојала би јединствена права која је инцидентна са те две различите тачке, њихова спојница.

Специјално, $\Lambda = \Sigma = \emptyset$

$$\mathcal{T} = \emptyset \quad \mathcal{P} = \emptyset \quad \mathcal{I} = \emptyset$$

Деф Пројективна раван је модел система $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ који испуњава (A1), (A2) и (A3).

Теорема У пројективној равни важи Принцип дуалности.

Жергон и Понселе се дуго спорили око питања приоритета на откриће Принципа дуалности.

1.3. Интуитивна пројективна раван

Еуклидска раван $\mathbb{E}$ није пројективна раван ((A2) не важи због постојања паралелних правих).

$\mathbb{E} = (\mathcal{T}_{\mathbb{E}}, \mathcal{P}_{\mathbb{E}}, \mathcal{I}_{\mathbb{E}})$ еуклидска раван

тачке — праве — релација инциденције

Да би важила (A2) потребно је измислити неке „имагинарне" тачке у којима ће се сећи паралелне праве. То остварујемо тако што ће нам у новој равни тачке бити праменови правих у равни $\mathbb{E}$. Они се јављају у два облика, као прамен конкурентних правих (који се природно поистовећује са пресечном тачком) и прамен паралелних правих.

Праве $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}$ ћемо задржати и у новом моделу, док релацију инциденције уводимо на природан начин: неки прамен, као тачка нове равни, ће бити инцидентан са правом уколико је садржи, односно ако је та права једна од правих из почетног прамена. Свакој правој у овој конструкцији придружујемо додатну тачку која представља прамен правих паралелних са њом. Тако су паралелне праве инцидентне са заједничком таквом тачком за коју кажемо да је бесконачна тачка

$\forall p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}$ садржи и бесконачну тачку $\infty_{[p]}$ где је $[p]$ класа еквиваленције свих правих паралелних са p.

Додатно уводимо бесконачну праву која садржи све бесконачне тачке а коју обележавамо са u_∞.

$$\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}_{\mathbb{E}} \cup \bigcup_{p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}} \{\infty_{[p]}\} \qquad \mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_{\mathbb{E}} \cup \{u_\infty\}$$

$$\mathcal{I}_\infty = \mathcal{I}_{\mathbb{E}} \cup \bigcup_{p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}} \{(\infty_{[p]}, p), (\infty_{[p]}, u_\infty)\}$$

Теорема:

Интуитивни модел $\mathbb{E}\mathbb{P}^2 = (\mathcal{T}_\infty, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{I}_\infty)$ је пројективна раван.

1.4. Аналитичка пројективна раван

У овој конструкцији посматрамо тродимензиони векторски простор. Тачке пројективне равни ће бити праве које пролазе кроз координатни почетак, док ће праве бити равни које пролазе кроз координатни почетак.

Радимо са $\mathbb{F}$ - произвољно поље, $\mathbb{F}^3$ - скуп свих уређених тројки елемената из $\mathbb{F}$ који има структуру векторског простора над $\mathbb{F}$ димензије три.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \text{ произвољно}$$

Права кроз координатни почетак која садржи x је скуп $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{F}\}$ што је векторски потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије један.

За линеарно независне x и y из $\mathbb{F}^3$, раван кроз координатни почетак која их садржи је скуп $\{\lambda x+\mu y : \lambda, \mu \in \mathbb{F}\}$ и он је векторски потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије два.

Основне елементе пројективне равни над $\mathbb{F}$ дефинишемо на следећи начин:

$T_{\mathbb{F}}$ су једнодимензиони потпростори од $\mathbb{F}^3$

$P_{\mathbb{F}}$ су дводимензиони потпростори од $\mathbb{F}^3$.

Инциденција $U \, \mathcal{I}_{\mathbb{F}} \, V$ значи да је $U \in T_{\mathbb{F}}$ потпростор од $V \in P_{\mathbb{F}}$.

Посматрајмо релацију еквиваленције $\sim$ за коју је $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$ акко $\exists \lambda \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ т.д. је $y_i = \lambda x_i$ за $i \in \{1,2,3\}$. Посматрајмо сада класе уређених тројки вектора из $\mathbb{F}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ сечене по поменутој релацији сразмерности.

Скуп свих таквих класа еквиваленције где су сразмерни вектори у истој класи, означимо са

$$\mathcal{K} = \mathbb{F}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/_{\sim} = \mathbb{F}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/_{\mathbb{F}\setminus\{0\}}$$

Потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије један је генерисан неким вектором $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$, а његови елементи припадају класи еквиваленције из $\mathcal{K}$ за вектор представник (x_1, x_2, x_3). Скуп тачака $T_{\mathbb{F}} = \mathcal{K}$, а уколико $A \in T_{\mathbb{F}}$ има вектор представник (x_1, x_2, x_3) кажемо да тачка A има хомогене координате $(x_1 : x_2 : x_3)$.

Сваки дводимензиони потпростор од $\mathbb{F}^3$ је облика $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{F}^3 : u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0\}$ и он се може једнозначно (до на множење вектора скаларом) изразити својим вектором нормале $(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{F}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. Скуп правих $\mathcal{P}_{\mathbb{F}} = \mathcal{K}$, а уколико $p\in\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ има вектор представник тј. вектор нормале (u_1,u_2,u_3) кажемо да права p има хомогене координате $[u_1:u_2:u_3]$.

$\vec{X}$ неки вектор представник тачке X

$\vec{x}$ неки вектор представник праве x

$[\vec{X}]=X$ $\quad$ $[\vec{x}]=x$ $\leftarrow$ угласте заграде користимо за класу еквиваленције

Векторе често представљамо као колона матрице.

Једнодимензиони простор $U\in\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ садржан је у дводимензионом простору $V\in\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ уколико је U један од праваца у V тј. уколико је U нормалан на вектор нормале од V (њихов скаларни производ је једнак нули). Дакле, тачка $A=(x_1:x_2:x_3)\in\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ је инцидентна са правом $p=[u_1:u_2:u_3]\in\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ и пишемо $A \, \mathcal{I}_{\mathbb{F}} \, p$ акко $\vec{A} \cdot \vec{p} = 0 \iff u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$

Матрични запис ове једначине инциденције је $(\vec{p})^T \vec{A} = 0$ тј.

$(\vec{A})^T \vec{p} = 0$ где је $\_^T$ транспонат матрице.

<u>**Теорема**</u> Аналитички модел $\mathbb{FP}^2 = (\mathcal{T}_{\mathbb{F}}, \mathcal{P}_{\mathbb{F}}, \mathcal{I}_{\mathbb{F}})$ је пројективна раван за свако поље $\mathbb{F}$.

(A3) важи, довољно је узети тачке $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ и $(1:1:1)$ $\leftarrow$ међу њима нема три колинеарне.

$A = (a_1 : a_2 : a_3)$, $B = (b_1 : b_2 : b_3)$ различите тачке у $\mathbb{FP}^2$

$p = A \vee B \implies A \, \mathcal{I} \, p$ и $B \, \mathcal{I} \, p \implies \vec{A} \cdot \vec{p} = 0$ и $\vec{B} \cdot \vec{p} = 0$

$\implies \vec{p}$ је нормално и на $\vec{A}$ и на $\vec{B}$ па има правац њиховог векторског производа $\implies \overrightarrow{A \vee B} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$$p = \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right]$$

Слично, нека су $p = [p_1 : p_2 : p_3]$ и $q = [q_1 : q_2 : q_3]$ различите праве у $\mathbb{FP}^2$. Како су праве p и q инцидентне са тачком $A = p \wedge q$ то је $\vec{A} \cdot \vec{p} = 0$ и $\vec{A} \cdot \vec{q} = 0$ одакле имамо да је $\vec{A}$ нормално и на $\vec{p}$ и на $\vec{q}$ те је $\overrightarrow{p \wedge q} = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & A_2 & q_3 \end{vmatrix}$:

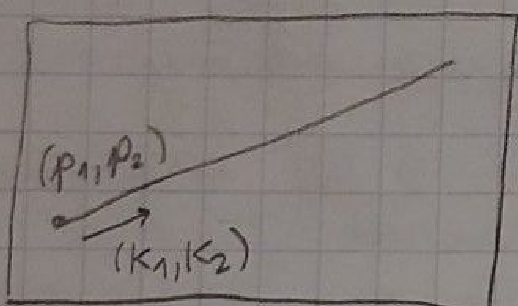
$$\Rightarrow \quad A = \left(\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \right)$$

Лема 1.5. За различите тачке A и B у $\mathbb{FP}^2$ важи $\overrightarrow{A \vee B} = \vec{A} \times \vec{B}$. За различите праве p и q у $\mathbb{FP}^2$ важи $\overrightarrow{p \wedge q} = \vec{p} \times \vec{q}$

Најчешће се за $\mathbb{F}$ узима поље реалних бројева $\mathbb{R}$.
Нека је еуклидска раван $\mathbb{E}$ смештена у еуклидски простор $\mathbb{R}^3$.
То може бити раван дата једначином $x_3 = 1$ где свакој тачки еуклидске равни (x_1, x_2) одговара вектор $(x_1, x_2, 1)$.
Посматрајмо сада вектор (x_1, x_2, x_3) из $\mathbb{R}^3$. Ако последња компонента није једнака нули тј. $x_3 \neq 0$ тај вектор можемо

поистоветити са једнодимензионим потпростором који је њиме разапет, а он сече смештену еуклидску раван у $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)$ односно у тачки $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \in \mathbb{E}$.

Преостали вектори су облика $(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ и они одговарају бесконачним тачкама тј. $(x_1, x_2, 0)$ је бесконачна тачка која одговара правој са правцем (x_1, x_2).



Ако пођемо од тачке $(p_1, p_2) \in \mathbb{E}$ и пратимо праву са правцем (k_1, k_2) добијамо векторе облика

$(p_1 + t k_1, p_2 + t k_2, 1)$ који су сразмерни векторима $\left(\frac{p_1}{t} + k_1, \frac{p_2}{t} + k_2, \frac{1}{t}\right)$ при чему кад $t \to \pm\infty$ овај вектор тежи ка $(k_1, k_2, 0)$.

Једначина праве у хомогеним координатама:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

Пресек са еуклидском равни $x_3 = 1$ даје еуклидску једначину праве у равни $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 = 0$

Једини тип вектора коме не одговара права је она са $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 \neq 0$, код једначина после дељења са u_3 постаје $x_3 = 0$. То је права са хомогеним координатама $[0:0:1]$ која садржи све бесконачне тачке те је то бесконачна права.

(4.1.) Нека су тачке еуклидске равни дате преко својих еуклидских координата: $A=(1,1)$, $B=(3,2)$, $C=(3,0)$, $D(4,1)$. Одредити координате пресечне тачке правих AB и CD. Поновити рачун у случају да су координате $D(5,1)$.

(*) Прво ћемо датим тачкама A, B, C и D у еуклидској равни доделити векторе представнике $\vec{A}=(1,1,1)$, $\vec{B}=(3,2,1)$, $\vec{C}=(3,0,1)$ и $\vec{D}=(4,1,1)$. На основу Леме 1.5. можемо одредити спојнице $A\vee B$ и $C\vee D$.

$$\overrightarrow{A\vee B} \overset{\text{Лема 1.5}}{=} \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-1, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{C\vee D} \overset{\text{Лема 1.5}}{=} \vec{C}\times\vec{D} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-1, 1, 3)$$

S – сечиште правих AB и CD

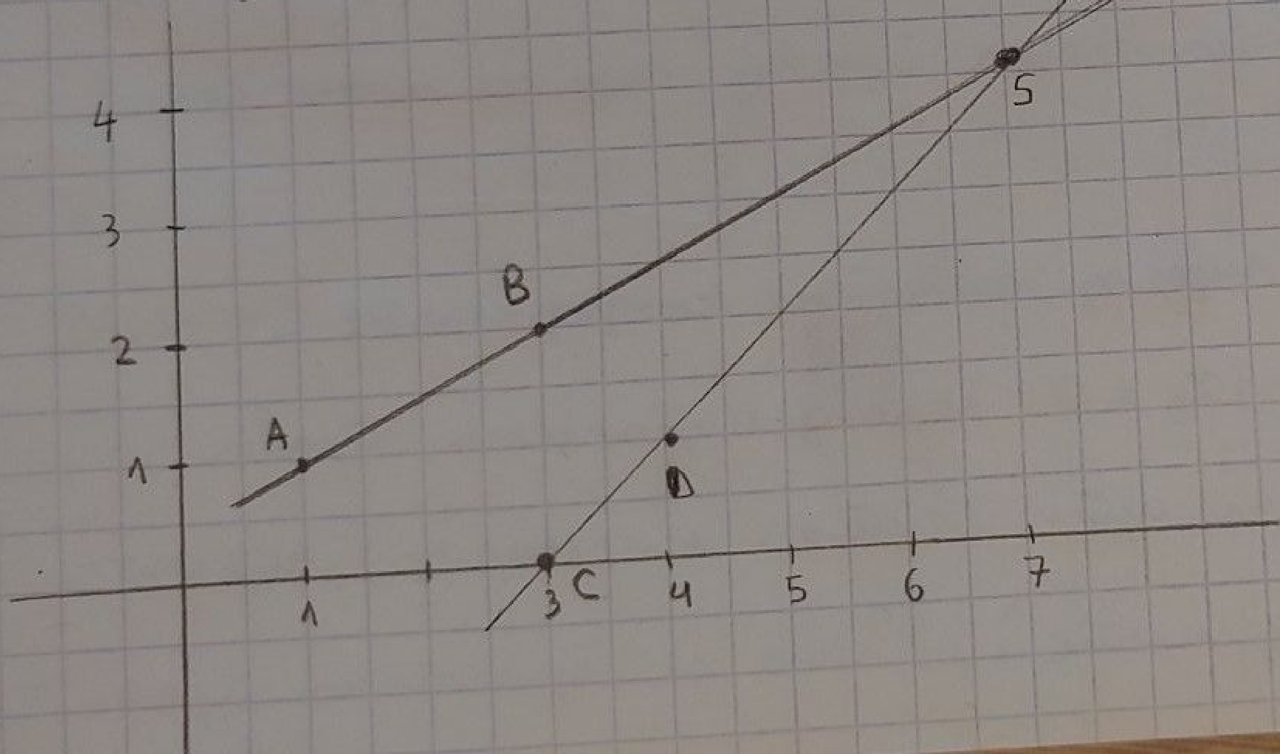
$$S = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$$

$$\vec{S} = \overrightarrow{(A \vee B) \wedge (C \vee D)} \overset{\text{Лема 1.5}}{=\!=} \overrightarrow{(A \vee B)} \times \overrightarrow{(C \vee D)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (7, 4, 1)$$

Хомогене координате тачке S су $(7:4:1)$, а еуклидске $(7, 4)$

да овде није била 1 него неки број $x_3 \neq 0$ онда би се прва и друга хомогена координата морале поделити са x_3



Када је $\Delta = (5,1)$ додељујемо јој вектор представник $\vec{\Delta} = (5,1,1)$ и промениће се спојница $C \vee \Delta$, као и сечиште S.

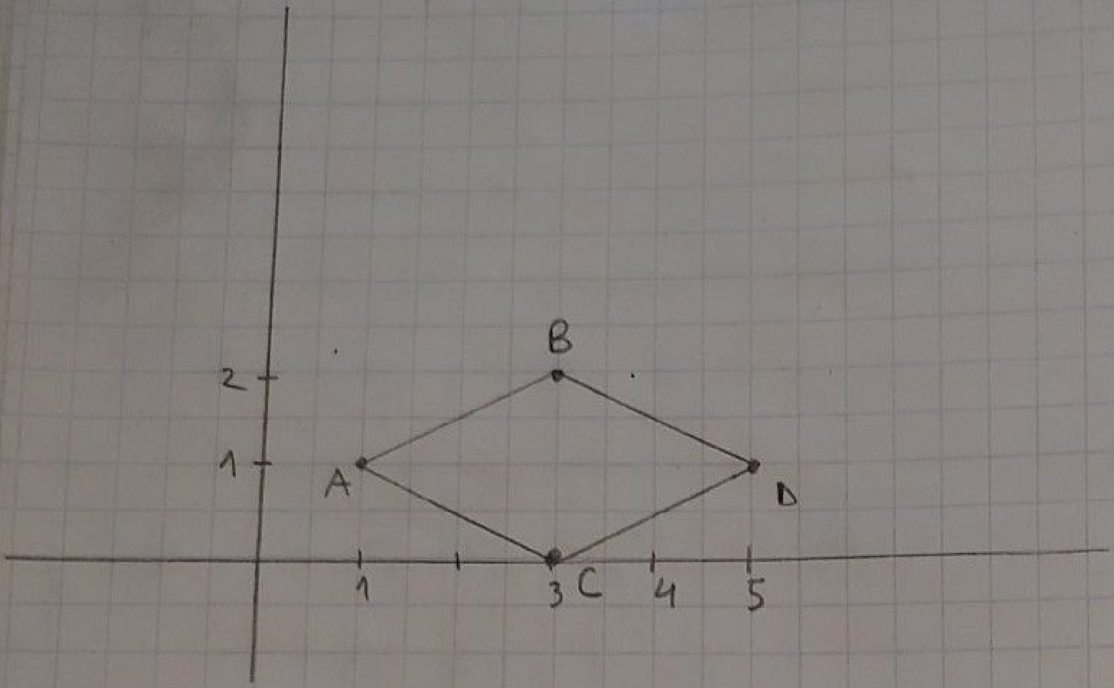
$$\overrightarrow{C \vee \Delta} \overset{\text{лема } 1.5.}{=\!=} \vec{C} \times \vec{\Delta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-1, 2, 3)$$

$$\vec{S} = \overrightarrow{(A \vee B) \wedge (C \vee \Delta)} \overset{\text{лема } 1.5.}{=\!=} \overrightarrow{A \vee B} \times \overrightarrow{C \vee \Delta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (8, 4, 0)$$

Тачка S тада има хомогене координате $(8:4:0)$ тј. $(2:1:0)$, а еуклидски гледано, у питању је бесконачна тачка, односно бесконачно сечиште паралелних правих AB и $C\Delta$.



(*) Нека је дата тачка $T=(3:2:1)$ помоћу својих хомогених координата. Одредити једначину праве у еуклидској равни која садржи тачку T и у еуклидском смислу је паралелна правој чије су хомогене координате $[1:-2:-3]$.

Решење: Једначина праве чије су хомогене координате $[1:-2:-3]$ је облика $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$ и њој паралелна права у еуклидском смислу има исти вектор нормале („читамо" га уз прве две координате). Зато је тражена права t

облика $x_1 - 2x_2 + dx_3 = 0$, а вредности параметра d можемо наћи из услова да тражена права мора садржати тачку $T(3:2:1)$ и узмимо $\vec{T} = (3,2,1)$ за вектор представник.

$$\vec{T} \circ \vec{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (3,2,1)\circ(1,-2,d) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - 4 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 1$$

Тражена једначина праве у еуклидској равни је

$$x - 2y + 1 = 0.$$