Девети домаћи **30. децембар 2021.**

1. Афина верзија теореме о нестишљивости
Пресликавање $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ облика

$$\psi(z) = \Psi(z) + z_0,$$

где је $\Psi \in Sp(2n)$ и $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$, назива се *афиним симплектоморфизмом* на $\mathbb{R}^{2n}$. Са $ASp(2n)$ означавамо *групу афиних симплектоморфизама*. Нека је $\psi \in ASp(2n)$ пресликавање такво да је $\psi(B^{2n}(1)) \subset Z^{2n}(R)$ (овде је $B^{2n}(1)$ јединична лопта у $\mathbb{R}^{2n}$ и цилиндар $Z^{2n}(R) = D^2(R) \times \mathbb{R}^{2n-2} \subset \mathbb{R}^{2n}$ где је $D^2(R)$ диск у (q_1, p_1) координатама).

а) Нека су $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ колоне од Ψ^T које одговарају координатама q_1 и p_1. Показати да је $\omega_0(u, v) = 1$, где је ω_0 стандардна симплектичка форма на $\mathbb{R}^{2n}$.

б) Ако су a, b координате од z_0 које одговарају координатама q_1 и p_1 показати да је

$$\sup_{|z|=1} \left((\langle u, z\rangle + a)^2 + (\langle v, z\rangle + b)^2 \right) \leq R^2.$$

в) Показати да је $R \geq 1$.

2. Нека је (P, ω) затворена симплектичка многострукост за коју важи $\pi_2(P) = 0$ (*асферична многострукост*). Нека је $\mathcal{L}P$ простор контрактибилних петљи $z : \mathbb{S}^1 \to P$, $\mathrm{Ham}(P, \omega)$ група Хамилтонових дифеоморфизама на P, $\widetilde{\mathrm{Ham}}(P, \omega)$ њено универзално наткривање и $\mathcal{L}\,\mathrm{Ham}(P, \omega)$ група контрактибилних петљи у $\mathrm{Ham}(P, \omega)$.

а) Нека је $\mathbb{D}$ неки диск чија је граница петља z. Доказати да је са

$$\mathcal{A}_H(z) = \int_{\mathbb{D}} \omega - \int_0^1 H(z(t), t)\, dt$$

добро дефинисан функционал дејства $\mathcal{A}_H : \mathcal{L}P \to \mathbb{R}$.

б) Нека је J скоро комплексна структура компатибилна са ω и $\bigtriangledown^J$ градијент у односу на Риманову метрику $\omega(\cdot, J\cdot)$. Доказати да је градијент функционала дејства у односу на L^2 метрику

$$\langle \xi, \eta\rangle = \int_0^1 \omega(\xi(t), \eta(t))\, dt$$

на $\mathcal{L}P$ дат са (проверити знак испред другог члана са десне стране)

$$\mathrm{grad}\, \mathcal{A}_H(z) = J\frac{dz}{dt} - \bigtriangledown^J H.$$

в) Доказати да је са $T_h(z) = h_t(z(t))$ дефинисано дејство групе $\mathcal{L}\,\mathrm{Ham}(P, \omega)$ на $\mathcal{L}P$.

г) Нека је

$$\mathcal{F} = \{H : P \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, H(x, t+1) = H(x, t)\}$$

скуп 1-периодичних Хамилтонијана. За $\phi \in \widetilde{\mathrm{Ham}}(P, \omega)$ означимо са $\mathcal{F}(\phi)$ скуп свих Хамилтонијана $F \in \mathcal{F}$ који генеришу ϕ. Нека је ψ_F^t Хамилтонов ток генерисан Хамилтонијаном $F \in \mathcal{F}$ и нека је $h = \{h_t\} \in \mathcal{L}\,\mathrm{Ham}(P, \omega)$. Означимо са $h \star F$ нормализован Хамилтонијан који генерише Хамилтонов ток $h_t^{-1} \circ \psi_F^t$. Доказати да је са

$$(F, h) \mapsto h \star F$$

добро дефинисано транзитивно дејство групе $\mathcal{L}\,\mathrm{Ham}(P, \omega)$ на $\mathcal{F}(\phi)$.

д) Нека је $H \in \mathcal{F}$ Хамилтонијан који генерише контрактибилну петљу $\{h_t\} \in \mathcal{L}\,\mathrm{Ham}(P, \omega)$ за коју је $h_0 = h_1 = \mathrm{id}$. Доказати да је $\mathcal{A}_H(\{h_t(x)\}) = 0$ за свако $x \in P$.

ђ) Доказати да је $(T_h^{-1})^* \mathcal{A}_F = \mathcal{A}_{h \star F}$ за свако $h = \{h_t\} \in \mathcal{L}\,\mathrm{Ham}(P, \omega)$ и $F \in \mathcal{F}$.

3. Нека је $\psi \in \mathrm{Symp}(P, \omega)$ симплектички дифеоморфизам.

а) Доказати да је са $T_\psi(\phi) = \psi \circ \phi \circ \psi^{-1}$ добро дефинисан хомоморфизам $T_\psi : \mathrm{Ham}(P, \omega) \to \mathrm{Ham}(P, \omega)$.

б) Доказати да је T_ψ изометрија у односу на Хоферову метрику.

в) Ако је симплектоморфизам ψ још и Хамилтонов дифеоморфизам онда важи $\rho(\phi, T_\psi\phi) \leq 2\rho(\mathrm{id}, \phi)$, где је ρ Хоферова метрика.

г) Нека је $\mathrm{Symp}_0(P,\omega)$ компонента путне повезаности у $\mathrm{Symp}(P,\omega)$ која садржи id. Доказати да је

$$G = \{\psi \in \mathrm{Symp}_0(P,\omega) \mid \sup_{\phi \in \mathrm{Ham}(P,\omega)} \rho(\phi, T_\psi \phi) < +\infty\}$$

нормална подгрупа групе $\mathrm{Symp}_0(P,\omega)$ која садржи $\mathrm{Ham}(P,\omega)$.

4. Нека је $\omega_0 = \sum dp_k \wedge dq_k$ стандардна симплектичка форма у еуклидском простору $\mathbb{C}^n$, $\psi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ и нека је, за $\lambda > 0$,

$$\psi_\lambda(z) = \lambda \psi(\lambda^{-1} z).$$

а) Доказати да је $\psi_\lambda \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}^n, \omega_0)$.

б) Доказати да је $\rho(\mathrm{id}, \psi_\lambda) = \lambda^2 \rho(\mathrm{id}, \psi)$.

5. Нека је $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ функција која задовољава

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le n^2 \\ n^2 + \varepsilon, & x > n^2 + \varepsilon \\ -\varepsilon, & x < -\varepsilon, \end{cases}$$

и нека је $\chi_n \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ глатка функција са компактним носачем таква да је $\chi_n(x,y) = 1$ на правоугаонику $\{0 \le x \le n^2,\ 0 \le y \le 2n^{-1}\}$ и $\| \bigtriangledown \chi_n(x,y)\| \le n^{-2}$ за све $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Нека је $\psi_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Хамилтонов дифеоморфизам генерисан Хамилтонијаном

$$H_n(x,y) = \frac{1}{n} f_n(x) \chi_n(x,y).$$

Доказати да је

$$\lim_{n\to+\infty} d_\infty(\mathrm{id}, \psi_n) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \rho(\mathrm{id}, \psi_n) = +\infty,$$

где је

$$d_\infty(f,g) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \|f(x,y) - g(x,y)\|$$

C^0-метрика на простору дифеоморфизама на $\mathbb{R}^2$ са компактним носачем.