Седми домаћи **20. децембар 2021.**

1. Нека је (P, ω) симплектичка многострукост и J скоро комплексна структура која је сагласна са ω. Ако је $L \subset P$ Лагранжева подмногострукост и $X_p \in T_pL \setminus \{0\}$ онда $JX_p \notin T_pL$.

2. Нека је (P, ω) симплектичка многострукост и J скоро комплексна структура која је сагласна са ω. Ако је подмногострукост $N \subset P$ затворена за J (односно ако важи $J(TN) \subset TN$) тада је N симплектичка подмногострукост.

3. Нека је (Σ, ω) компактна оријентисана површ (са симплектичком формом ω), $C \subset \Sigma$ глатка затворена крива и $H : \Sigma \to \mathbb{R}$ Хамилтонијан. Доказати да је X_H негде тангентно на криву C.

4. Нека је $(P, \omega = -d\lambda)$ тачна просто повезана симплектичка многострукост и $\psi : P \to P$ Хамилтонов дифеоморфизам са компактним носачем. Означимо са H_t Хамилтонијан са компактним носачем који генерише ψ, тј. такав да је њиме дефинисан пут Хамилтонових дифеоморфизама ψ_H^t такав да је $\psi = \psi_H^1$.

а) Нека је $p \in P$. Доказати да вредност функционала дејства $\mathcal{A}_H(\gamma^p)$ дуж криве $\gamma^p(t) = \psi_H^t(p)$ не зависи од Хамилтонијана H који генерише ψ.

б) Ако је p фиксна тачка дифеоморфизма ψ доказати да вредност функционала дејства $\mathcal{A}_H(\gamma^p)$ не зависи ни од примитивне форме λ.

5. (Морсова лема) Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ глатка функција и $a_0 \in \mathbb{R}^n$ њена недегенерисана критична тачка (односно $df(a_0) = 0$ и матрица другог извода $D^2 f(a_0)$ је недегенерисана). Тада постоји координатна карта око a_0 у којој функција f има запис

$$f(x) = f(a_0) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2, \ \lambda_k = \pm 1.$$