Шести домаћи **6. децембар 2021.**

1. Доказати да је 2-сфера полупречника r без једне тачке симплектоморфна отвореном диску полупречника $2r$ и наћи експлицитну формулу симплектоморфизма.

2. Доказати да се свака довољно мала контрактибилна петља на $\mathbb{T}^2$ може раздвојити од себе Хамилтоновим дифеоморфизмом.

3. Нека је α диференцијална 1-форма на M. Доказати да је вертикална транслација

$$T_\alpha : T^*M \to T^*M, \ \ T_\alpha(\xi) = \xi + \alpha$$

симплектоморфизам ако и само ако је α затворена форма. Доказати да је T_α Хамилтонов дифеоморфизам ако и само ако је α тачна форма.

4. Нека је P тачна симплектичка многострукост, односно нека је симплектичка форма на њој облика $\omega = -d\theta$ за неку 1-форму θ. Означимо са ϕ_t глатку фамилију дифеоморфизама. Доказати

а) ϕ_t је фамилија симплектоморфизама ако и само ако је 1-форма $\phi_t^*\theta - \theta$ затворена за свако t;

б) ϕ_t је фамилија Хамилтонових дифеоморфизама ако и само ако је 1-форма $\phi_t^*\theta - \theta$ тачна за свако t.

5. Нека је $Y : M \to TM$ векторско поље на многострукости M и ψ_t њиме генерисана једнопараметарска фамилија дифеоморфизама. Лијеви изводи векторског поља X и форме η на M су дефинисани са

$$L_Y X := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_t^* X, \qquad L_Y \eta := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_t^* \eta$$

где је $\psi^* X := \psi_*^{-1} X$ за дифеоморфизам ψ.

а) Доказати да је Лијев извод 0-форме извод функције у правцу вектора.

б) Доказати линеарност

$$L_Y(\alpha + \beta) = L_Y\alpha + L_Y\beta$$

и Лајбницово правило

$$L_Y(\alpha \wedge \beta) = (L_Y\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_Y\beta$$

за Лијев извод (α и β су диференцијалне форме).

в) Доказати да Лијев извод

$$L_Y : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

комутира са спољашњим изводом

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

и унутрашњим изводом

$$\imath_Y : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M).$$

г) Ако је $[X, Y] := XY - YX$ комутатор векторских поља X и Y доказати да је

$$L_Y X = [X, Y].$$

6. Нека је (P, ω) симплектичка многострукост. Нека су $H, K : P \to \mathbb{R}$ глатке функције и X_H, X_K њима придружена Хамилтонова векторска поља. Пуасонова заграда функција H и K дефинише се једнакошћу

$$\{H, K\} := \omega(X_H, X_K).$$

а) Показати да је $\{\cdot, \cdot\}$ билинеарна операција.

б) Показати да $\{\cdot, \cdot\}$ задовољава Јакобијев идентитет.

в) Показати да $\{\cdot, \cdot\}$ задовољава Лајбницово правило.

г) Нека је $X_{\{H,K\}}$ Хамилтоново векторско поље придружено функцији $\{H, K\}$. Доказати да је

$$[X_H, X_K] = X_{\{H,K\}}.$$

д) Нека су

$$X, Y : P \to TP$$

симплектичка (не обавезно Хамилтонова) векторска поља. Доказати да је $[X, Y]$ Хамилтоново векторско поље са хамилтонијаном

$$H = \omega(X, Y).$$

7. Нека је (P, ω) симплектичка многострукост. Показати да је дифеоморфизам $\phi : P \to P$ симплектоморфизам ако и само ако је његов график $\Gamma(\phi)$ Лагранжева подмногострукост у $(P \times P, \pi_1^*\omega - \pi_2^*\omega)$.

8. Нека хамилтонијан H_t генерише Хамилтонов дифеоморфизам ϕ_H^t и нека хамилтонијан K_t генерише Хамилтонов дифеоморфизам ϕ_K^t. Показати да хамилтонијан $H_t(x) + K_t((\phi_H^t)^{-1}(x))$ генерише Хамилтонов дифеоморфизам $\phi_H^t \circ \phi_K^t$.

9. Нека су ϕ_t и ψ_t Хамилтонови дифеоморфизми генерисани хамилтонијанима H и G са компактним носачима такви да је $\phi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_t$ за свако t. Доказати да су H и G у инволуцији. Да ли исто тврђење важи без претпоставке о компактности носача? (Упутство: Посматрањем следћа два хамилтонијана на $\mathbb{R}^2$: $H(q, p) = p$ и $G(q, p) = q$ закључити да тврђење не важи ако изоставимо претпоставку о компактности носача. Разјаснити где се у доказу користи да хамилтонијани H и G имају компактне носаче.)

10. Нека је $\beta : M \to T^*M$ 1-форма. Тада је $\beta(M)$ Лагранжева подмногострукост у T^*M ако и само ако је $d\beta = 0$.

11. Доказати да је $\mathbb{R}P^n$ Лагранжева подмногострукост у $\mathbb{C}P^n$ са Фубини-Штудијевом формом.