Пети домаћи **26. новембар 2021.**

1. Нека су (V_0, Ω_0) и (V_1, Ω_1) симплектички векторски простори исте димензије, $L_0 \subset V_0$ Лагранжев потпростор и $\Psi : V_0 \to V_1$ симплектоморфизам симплектичких векторских простора. Нека је

$$V = V_0 \times V_0 \times V_1$$

симплектички векторски простор са симплектичком формом $\Omega = \Omega_0 \times (-\Omega_0) \times \Omega_1$. Показати да је $W = \Delta_{V_0} \times V_1 \subset V$ коизотропан потпростор и одредити чему је изоморфан редукован простор $W/W^{\perp_\Omega}$. Показати да је потпростор

$$L = L_0 \times \Gamma_\Psi \subset V$$

Лагранжев и да сече W трансверзално. Редукован Лагранжев потпростор је изоморфан са $L_1 = \Psi L_0$.

2. Нека је M глатка многострукост и λ Лиувилова 1-форма на котангентном раслојењу T^*M. Показати да важи

$$(\forall \beta \in \Omega^1(M))\ \beta^*\lambda = \beta. \tag{1}$$

Овде 1-форму β можемо да посматрамо као пресликавање $\beta : M \to T^*M$. Показати да Лиувилова форма може да се карактерише и помоћу једнакости (1), тј. као јединствена 1-форма на T^*M за коју важи (1).

3. Доказати да је са $\omega(X, Y) = \langle \mathbf{r}, X \times Y \rangle$ дефинисана симплектичка форма на сфери $\mathbb{S}^2$, за векторе $X, Y \in T_{\mathbf{r}}\mathbb{S}^2$. Доказати да се ω поклапа са формом запремине на $\mathbb{S}^2$ која је индукована стандардном метриком у $\mathbb{R}^3$. Показати да цилиндричне координате (φ, z) чине Дарбуове карте за $(\mathbb{S}^2, \omega)$ (у околинама које не садрже полове сфере).

4. Показати да је Фубини-Штудијева форма

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log ||\xi||^2, \quad \xi = [\xi_0 : \xi_1 : ... : \xi_n] \in \mathbb{C}P^n,$$

добро дефинисана иако је $||\xi||^2 = \sum_{i=0}^n \xi_i \overline{\xi}_i$ дефинисано на $\mathbb{C}^{n+1}$ али не и на $\mathbb{C}P^n$. Показати да је $\omega_{FS}(X, iX) > 0$ за сваки тангентни вектор $X \neq 0$.

5. Нека су (P_1, ω_1) и (P_2, ω_2) симплектичке многострукости. Показати да су $\omega = \pi_1^*\omega_1 \pm \pi_2^*\omega_2$ симплектичке форме на приозводу многострукости $P = P_1 \times P_2$.

6. Ако је $f : M \to N$ дифеоморфизам, доказати да за пресликавање $F : T^*N \to T^*M$, дато са $F = f^*$, важи $F^*\lambda_M = \lambda_N$ где су λ_M и λ_N Лиувилове 1-форме на T^*M и T^*N. Извести одатле да је F симплектоморфизам котангентних раслојења T^*M и T^*N.

7. Нека је Σ компактна оријентисана површ и ω_0, ω_1 две симплектичке форме на њој. Доказати да су (Σ, ω_0) и (Σ, ω_1) симплектоморфне ако и само ако важи

$$\int_\Sigma \omega_0 = \int_\Sigma \omega_1.$$