Четврти домаћи **19. новембар 2021.**

1. Нека је (V,Ω) симплектички векторски простор димензије $2n$ и W његов потпростор. Показати да важи:

(а) $\dim W + \dim W^{\perp_\Omega} = 2n$ (где је $W^{\perp_\Omega}$ симплектички ортогонал);

(б) $(W^{\perp_\Omega})^{\perp_\Omega} = W$;

(в) Ако је W изотропан потпростор показати да је $\dim W \leq n$;

(г) Ако је W коизотропан потпростор показати да је $\dim W \geq n$;

(д) Показати да је W симплектички потпростор ако и само ако је $V = W \oplus W^{\perp_\Omega}$;

(ђ) Ако је W Лагранжев потпростор тада је простор (V,Ω) симплектоморфан простору $(W \oplus W^*, \Omega_0)$ где је Ω_0 форма дефинисана једнакошћу

$$\Omega_0(u \oplus \alpha, v \oplus \beta) = \beta(u) - \alpha(v).$$

2. Нека је (V,Ω) симплектички векторски простор димензије $2n$ и J комплексна структура на V. Показати следећа тврђења:

(а) ако је структура J Ω-сагласна и L Лагранжев потпростор од V тада је JL такође Лагранжев потпростор и важи $JL = L^\perp$ где је $L^\perp$ ортогонал у односу на скаларни производ $G_J(u,v) = \Omega(u, Jv)$;

(б) структура J је Ω-сагласна ако и само ако постоји симплектичка база облика $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ за коју још важе и једнакости $Je_i = f_i$ за $i \in \{1, ..., n\}$.

3. Нека је (V,Ω) симплектички векторски простор и $\mathcal{J}(V,\Omega)$ скуп свих комплексних структура на V које су Ω-сагласне. Фиксирајмо један Лагранжев потпростор L_0, са $\mathcal{L}(V,\Omega,L_0)$ означимо скуп свих Лагранжевих потпростора у V који L_0 секу трансверзално и са $\mathcal{G}(L_0)$ означимо скуп Риманових метрика на L_0. Дефинишемо пресликавање

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{J}(V,\Omega) &\to \mathcal{L}(V,\Omega,L_0) \times \mathcal{G}(L_0)\\ J &\mapsto (JL_0, G_J|_{L_0})\end{aligned}$$

где је $G_J(\cdot,\cdot) = \Omega(\cdot, J\cdot)$. Показати следећа својства

(а) пресликавање Ψ је добро дефинисано,

(б) пресликавање Ψ је бијекција,

(в) простор $\mathcal{L}(V,\Omega,L_0)$ је контрактибилан,

(г) простор $\mathcal{G}(L_0)$ је контрактибилан,

а затим закључити да је скуп $\mathcal{J}(V,\Omega)$ контрактибилан.