Трећи домаћи **12. новембар 2021.**

1. Показати да свака глатка многострукост M допушта Риманову метрику. Дефинишемо

$$\mathcal{M}et(M) = \{g \,:\, g \text{ је Риманова метрика на } M\}.$$

Показати да је простор $\mathcal{M}et(M)$ контрактибилан. (Упутство: Показати да је овај простор конвексан.)

2. Показати да за сваку глатку многострукост M њено тангентно раслојење TM има структуру глатке многострукости.

3. Нека је M глатка многострукост, $\phi_t : M \to M$ глатка фамилија глатких пресликавања генерисаним векторским пољем X,

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x)),$$

и α је $k-$форма на M. Показати да важи **Картанова формула**

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha = \phi_t^*\left[d(i(X)\alpha) + i(X)d\alpha\right].$$

Дефиниција. Нека је X векторско поље на M и α једна $k-$форма на M. Тада је $i(X)\alpha$ једна $k-1$ форма дефинисана једнакошћу

$$i(X)\alpha(Y_1, Y_2, ..., Y_{k-1}) := \alpha(X, Y_1, Y_2, ..., Y_{k-1}).$$

Операција $i(X)$ назива се *унутрашњим множењем* или *унутрашњим диференцирањем.*

Означимо са $\Omega^k(\cdot)$ простор $k-$форми на одговарајућој многострукости. Глатко пресликавање $f : M \to N$ индукује пресликавање $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ једнакошћу

$$f^*\alpha(X_1, ..., X_k) := \alpha(f_*(X_1), ..., f_*(X_k)).$$

Пресликавање f^* назива се *повлачењем* или *pullback пресликавања* f. $\Diamond$

(Упутство: За додатну помоћ и особине дефинисаних операција консултовати скрипту из Анализе 2 од Д. Милинковића.)

4. Нека је U глатка функција на Римановој многострукости (M, g). Посматрамо Лагранжијан $L : TM \to \mathbb{R}$ који је дат са

$$L(v) = \frac{1}{2}g(v, v) - U(\pi(v)).$$

Пресликавање π је канонска пројекција $\pi : TM \to M$. Нека је X Килингово векторско поље на M које задовољава додатну особину $X(U) = 0$. Показати да је функција $I : TM \to \mathbb{R}$, дата са

$$I(v) = g(v, X(\pi(v))),$$

први интеграл нашег Лагранжевог система.

Дефиниција. Кажемо да је $X : M \to TM$ *Килингово векторско поље* ако за сва векторска поља $Y, Z : M \to TM$ важи

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$$

где је ∇ јединствена Леви-Чивитина повезаност на M. $\Diamond$