Други домаћи **4. новембар 2021.**

1. Планета масе m креће се око Сунца масе M. Нека је координатни систем постављен тако да се у координатном почетку налази Сунце и планета се у почетном тренутку налази у $x0y$ равни. Кретање планете се одвија под дејством гравитационе силе

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{||\mathbf{r}||}\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ означава положај планете а $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ њену брзину у тренутку t.

(а) Доказати да је вектор $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ константан и закључити да се кретање планете одвија у једној равни.

(б) Доказати да је $\mathbf{M} = r^2\dot{\theta}\mathbf{e_z}$ где је θ поларни угао а $\mathbf{e_z}$ је орт $z-$осе.

(в) Доказати да је површина коју пребрише вектор положаја између тренутака t_0 и t_1 једнака $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}r^2\, d\theta$.

(г) Извести други Кеплеров закон: Радијус вектор од Сунца до планете захвата једнаке површине у једнаким временским интервалима.

(д) Претпоставимо да је у почетном тренутку $t_0 = 0$ планета најближа Сунцу и да је координатни систем изабран тако да је је поларни угао $\theta = 0$ када је $t = 0$, тј. планета се у почетном тренутку налази на $x-$оси (приметимо да је $\dot{r}(0) = 0$ јер функција растојања достиже минимум у тренутку $t = 0$). Показати, користећи (б) да је $r^2\dot{\theta} = r_0v_0$, где су r_0 и v_0 почетно растојање од Сунца и почетна брзина планете.

(ђ) Извести из претходног слова и другог Њутновог закона да важи

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2},$$

затим сменом $p = \frac{dr}{dt}$ свести ову једначину другог реда на једначину првог реда

$$p\frac{dp}{dr} = \frac{r_0^2v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2},$$

а одатле, уз почетне услове $r(0) = r_0$ и $\dot{r}(0) = 0$ извести једначину

$$\dot{r}^2 = v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

(е) Користећи (д) и (ђ) доказати да је

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + 2h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right),$$

где је $h = \frac{GM}{r_0^2v_0^2}$ и сменом $u = \frac{1}{r}$ свести једначину на

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}, \tag{1}$$

где је $u_0 = \frac{1}{r_0}$.

(ж) Доказати да је $\dot{r} \geq 0$ за довољно мало $t \geq 0$ па из тога извести закључак да је $0 \leq \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{dr}{d\theta} = -r^2\frac{du}{d\theta}$. Одавде следи да у једначини (1) треба посматрати решење са знаком минус испред корена.

(з) Из почетних услова следи да је $u = u_0$ за $\theta = 0$. Показати да је решење једначине (1)

$$r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e\cos\theta},$$

где је $e = \frac{1}{r_0h} - 1 = \frac{r_0v_0^2}{GM} - 1$, што је формулација првог Кеплеровог закона: Путања планете око Сунца је конусни пресек са једним фокусом у Сунцу и са ексцентрицитетом $\frac{r_0v_0^2}{GM} - 1$.

(и) Нека је T период револуције планете око Сунца. Извести из (в) и (д) израз за површину елипсе по којој се креће планета $P = \frac{1}{2}Tr_0v_0$.

(j) Користећи (и) и познату формулу за површину елипсе извести трећи Кеплеров закон: Однос квадрата периода револуције планете и куба велике полуосе елипсе је исти за сваку планету у систему и износи $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

2. Нека је $U \subset \mathbb{R}^3$ отворен скуп, $\mathbf{F}$ векторско поље на U, f функција на U, $dV = dx \wedge dy \wedge dz$ стандардна форма запремине, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $(\cdot, \cdot, \cdot)$ скаларни и мешовити производ у $\mathbb{R}^3$. Дефинишимо форме

$$\eta^0_f := f, \qquad \eta^1_{\mathbf{F}} := \langle \mathbf{F}, \cdot \rangle, \qquad \eta^2_{\mathbf{F}} := (\mathbf{F}, \cdot, \cdot), \qquad \eta^3_f = f\, dV.$$

(а) Доказати да важи $\eta^1_{\mathbf{F}} \wedge \eta^1_{\mathbf{G}} = \eta^2_{\mathbf{F}\times\mathbf{G}}$ и $\eta^1_{\mathbf{F}} \wedge \eta^2_{\mathbf{G}} = \eta^3_{\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle}$.

(б) Доказати да су са

$$\eta^1_{\nabla f} := d\eta^0_f, \qquad \eta^2_{\nabla\times\mathbf{F}} := d\eta^1_{\mathbf{F}} \qquad \eta^3_{\langle \nabla, \mathbf{F} \rangle} := d\eta^2_{\mathbf{F}},$$

добро дефинисана векторска поља градијент ∇f и ротор $\nabla\times\mathbf{F}$ и скаларно поље дивергенција $\langle \nabla, \mathbf{F} \rangle \equiv \nabla \cdot \mathbf{F}$.

(в) Доказати да је $\eta^3_{\langle \nabla, \mathbf{F}\times\mathbf{G} \rangle} = \eta^3_{\langle \mathbf{G}, \nabla\times\mathbf{F} \rangle - \langle \mathbf{F}, \nabla\times\mathbf{G} \rangle}$ и извести једнакост $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \langle \mathbf{G}, \operatorname{rot}\mathbf{F} \rangle - \langle \mathbf{F}, \operatorname{rot}\mathbf{G} \rangle$.

(г) Користећи сличну идеју као у претходној тачки показати да важи $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{F} + f \operatorname{rot}\mathbf{F}$ и $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \langle \mathbf{F}, \operatorname{grad} f \rangle + f \operatorname{div}\mathbf{F}$.

(д) Доказати да важи $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$.

(ђ) Доказати да важе идентитети

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, && \int_\Sigma (d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{F} = \int_{\partial\Sigma} d\mathbf{S}\times\mathbf{F},\\
&\int_\Sigma \nabla f\times d\mathbf{S} = -\int_{\partial\Sigma} f\, d\mathbf{r}, && \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \int_{\partial V} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S},\\
&\int_V \nabla\times\mathbf{F}\, dV = -\int_{\partial V} \mathbf{F}\times d\mathbf{S}, && \int_V \nabla f\, dV = \int_{\partial V} f\, d\mathbf{S}.
\end{aligned}$$

(е) Оператор Лапласијан дефинише се као $\Delta = \operatorname{div}\circ\operatorname{grad}$. Доказати Гринову формулу

$$\int_V (g\Delta f - f\Delta g)\, dV = \int_{\partial V} (g\nabla f - f\nabla g)\cdot d\mathbf{S}.$$