Први домаћи **22. октобар 2021.**

1. Показати да су свака два Галилејева простора изоморфна (и сваки је изоморфан са $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, t, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ где је $t=\pi_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ пројекција на прву координату и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ је стандардан скаларни производ на $\mathrm{Ker}(t)=\{0\}\times\mathbb{R}^3$). Подсетимо се да је Галилејев простор уређена тројка $(\mathbb{A}^4, t, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ где је $t:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ ненула линеаран функционал и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ је позитивно дефинитна квадратна форма на $\mathrm{Ker}(t)$.

2. Изоморфизам $\phi:\mathbb{A}^4\to\mathbb{R}^4$ одговарајућих Галилејевих простора назива се инерцијалним координатним системом на $\mathbb{A}^4$. Нека су ϕ_1 и ϕ_2 два инерцијална координатна система на $\mathbb{A}^4$ и нека су дата два пресликавања $q,\tilde{q}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$. Показати да је

$$\phi_1^{-1}(\mathrm{Graph}(q)) = \phi_2^{-1}(\mathrm{Graph}(\tilde{q})) \tag{1}$$

ако и само ако су q и $\tilde{q}$ повезани релацијом

$$\tilde{q}(t+s) = G(q(t)) + t\overrightarrow{v} + \overrightarrow{s},\ t\in\mathbb{R},$$

за неко $G\in O(3)$, $\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^3$, $(s,\overrightarrow{s})\in\mathbb{R}^4$.

Једнакост (1) нам каже да q и $\tilde{q}$ представљају исту светску линију у односу на инерцијалне координатне системе ϕ_1 и ϕ_2, редом.

3. Предмет јединичне масе бачен је у вис са почетном брзином v_0 и по углом α, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Претпоставимо да на тело делује само сила гравитације.

(а) Описати трајекторију предмета, одредити највећу висину коју ће предмет да достигне у односу на земљу и растојање (у односу на почетни положај) на коме ће да падне.

(б) Показати да се максималне висине налазе на елипси.

(в) Доказати да се удвостручавањем почетне брзине добија четвороструко већа максимална висина и хоризонтални домет.

4. На вертикалну опругу дужине L и константе опруге α^2 чији је горњи крај фиксиран, обешен је тег масе m. Претпоставићемо да на тег делују сила гравитације и сила затезања опруге.

(а) Доказати да се опруга у равнотежном положају истеже до дужине $L+h$, где је $\alpha^2 h = mg$.

(б) Доказати да је укупна сила која дејствује на тег при истезању x у односу на равнотежни положај једнака $mg-\alpha^2(h+x)$.

(в) Доказати да једначина $m\frac{d^2x}{dt^2}=-\alpha^2 x$ описује кретање тела и решити ову једначину.