

$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, где је $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ придружени низ у ℓ^2 за коју је $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \|f^*\|^2$. Како је $f^*(e_n) = y_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, то из конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$ следи да $y_n \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, па за свако $f^* \in (\ell^2)^*$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} f^*(e_n) = 0 = f^*(0)$. Дакле $e_n \xrightarrow{w} 0$ кад $n \rightarrow \infty$, а да притом низ $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира јако.

Јако се види да слаба конвергенција у ℓ^2 (општије у ℓ^p за $1 < p < \infty$) повлачи само конвергенцију по координатама. За то је довољно посматрати координатне линеарне функционале $e_n^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ на векторима $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$.

Природно је питање да ли је, као и код јаке конвергенције, сваки слабо конвергентан низ ограничен.

СТАВ 8.20. *Сваки слабо конвергентан низ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ је ограничен, тј. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$.*

Δ Из дефиниције слабе конвергенције следи да за свако $f^* \in X^*$ постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} f^*(x_n)$ који је скалар. Посматрајмо на простору X^* низ линеарних ограничених функционала датих са $x_n^{**}(f^*) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(x_n)$ за све $f^* \in X^*$ и свако $n \in \mathbb{N}$. Како је

$$\|x_n^{**}\| = \sup_{\substack{\|f^*\|=1 \\ f^* \in X^*}} |x_n^{**}(f^*)| = \sup_{\substack{\|f^*\|=1 \\ f^* \in X^*}} |f^*(x_n)| = \|x_n\|$$

(видети став 8.9) и како $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{**}(f^*)$ постоји за свако $f^* \in X^*$, на основу Banach-Steinhaus-ове теореме 7.9 је $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^{**}\| < +\infty$. $\square$

СТАВ 8.21. *Да би низ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо конвергирао ка елементу $x_0 \in X$ потребно је и довољно да:*

- 1° *низ $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ буде ограничен,*
- 2° *$\lim_{n \rightarrow \infty} f^*(x_n) = f^*(x_0)$ за свако f^* из неког фундаменталног скупа у X^* .*

Δ Ово је директна последица става 7.9. $\square$

ДЕФИНИЦИЈА 8.9. *Нека је $A_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ за свако $n \in \mathbb{N}$.*

- Низ оператора $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **униформно конвергира** ка оператору A ако $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$.
- Низ оператора $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **јако конвергира** ка оператору A ако $\|A_n x - A x\| \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$ за свако $x \in X$.
- Низ оператора $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **слабо конвергира** ка оператору A ако за свако $x \in X$ и свако $f^* \in Y^*$ важи $f^*(A_n x) \rightarrow f^*(A x)$ кад $n \rightarrow \infty$.

Већ смо утврдили да јака конвергенција повлачи слабу. Из неједнакости $\|A_n x - A x\| \leq \|A_n - A\| \|x\|$ следи да униформна конвергенција низа оператора (коју смо већ увели у претходној глави, види дефиницију 7.3) повлачи јаку конвергенцију.

Размотримо сада слабу конвергенцију у неким конкретним просторима.