(Л) Хиперболички скупови и сенчење

(1) Доказати Тврђење 1 са предавања.
(2) Доказати Тврђење 2 са предавања.
(3) Конструисати дифеоморфизам круга који задовољава прва три својства из дефиниције хиперболичности ($\Lambda = \mathbb{S}^1$) али не и четврто.
(4) Доказати да својство хиперболичност скупа Λ не зависи од избора Риманове метрике.
(5) Ако је x фиксна тачка дифеоморфизма f доказати да је скуп $\{x\}$ хиперболички ако и само ако је матрица извода df_x хиперболичка (тј. таква да је $|\lambda| \neq 1$ за сваку сопствену вредност λ). Шта могу бити константе C и λ за скуп $\{x\}$?
(6) Шта можемо рећи о хиперболичности периодичне орбите периода k?
(7) Ако су Λ_1 и Λ_2 хиперболички скупови за пресликавања f_1 и f_2 ($f_i : U_i \to M_i$, $i = 1, 2$), доказати да је $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ хиперболички за $f_1 \times f_2$.
(8) Доказати да је Смејлова потковица хиперболички скуп.
(9) Нека је $M \xrightarrow{\pi} N$ раслојење, $\lambda \subset M$ хиперболички скуп за дифеоморфизам $f : M \to M$. Нека је $g : N \to N$ фактор од f. Доказати да је $\pi(\Lambda)$ хиперболички скуп за g.
(10) Доказати тачке 1-4. у Примеру 4.
(11) Доказати да ако је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ C^1-близу пресликавању E_m, онда се свака бесконачна ε-псеудоорбита $\{x_n\}$ пресликавања f може осенчити правом орбитом пресликавања f. Ова орбита непрекидно зависи од $\{x_n\}$ у Тихоновљевој топологији.
(12) Нека је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ C^1 близу пресликавању E_m. Посматрајмо орбиту тачке x, $\{f^n(x)\}$ као ε-псеудоорбиту. Нека је y тачка за коју орбита $\{E_m^n(y)\}$ сенчи $\{f^n(x)\}$. Тада је пресликавање $\phi(x) = y$ хомеоморфизам који успоставља конјугацију између f и E_m. Доказати.
(13) Доказати тврђење са почетка Примера 5:

Нека је матрица $A \in \mathrm{M}_2$ хиперболичка и $\det A = \pm 1$. Тада за сваки ограничени низ $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^2$ постоји јединствени ограничени низ $\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^2$ за који важи

$$w_k - Aw_{k-1} = u_k, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Такође постоји константа C која зависи само од матрице A таква да је

$$\sup_k \|w_k\| \leq C \sup_k \|u_k\|.$$

[Упутство: једначина

$$w_k - Aw_k = u_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

еквивалентна је једначини

$$Bw_k - DBw_{k-1} = Bu_k,$$

где је D дијагонална матрица а B таква да је $A = B^{-1}DB$. Означимо

$$\begin{pmatrix} \alpha_k^+ \\ \alpha_k^- \end{pmatrix} = Bw_k, \quad \begin{pmatrix} \beta_k^+ \\ \beta_k^- \end{pmatrix} = Bu_k.$$

Нека су $\lambda_\pm$ сопствене вредности матрице A и то нека је $|\lambda_+| > 1$. Једначине

$$\alpha_k^+ - \lambda_+ \alpha_{k-1}^+ = \beta_k^+, \quad \alpha_k^- - \lambda_- \alpha_{k-1}^- = \beta_k^-$$

имају експлицитна решења по $\alpha_k^\pm$ (у облику бесконачног реда). Јединственост је могуће доказати индукцијом.]

(14) Доказати да је орбита која остварује сенчење у Примеру 5 јединствена.
(15) Ако дифеоморфизам f има хиперболичку фиксну тачку, доказати да свако g које је C^1-близу пресликавању f, такође има фиксну тачку.
(16) Интерпретирати Теорему 8 за $X = \mathbb{Z}_m$ и $f(z) = z + 1 \bmod m$.
(17) Доказати да је рестрикција $f|_\Lambda$ експанзивна.
(18) Да ли шатор пресликавање има својство сенчења?
(19) Доказати да изометрија многострукости нема својство сенчења.
(20) Доказати да се сваки минимални хиперболички скуп састоји од тачно једне периодичне орбите.