

(M) Стабилна и нестабилна многострукост

- (1) Нека је пресликавање  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  инвертибилно линеарно пресликавање и  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  Липшицово. Ако је  $\text{Lip}(g) < \text{co}(L)$ , доказати да је  $L + g$  би-Липшицово и да је

$$\text{Lip}((L + g)^{-1}) \leq \frac{1}{\text{co}(L) - \text{Lip}(g)}.$$

(Липшицова теорема о инверзној функцији.)

- (2) Доказати да постоји метрика  $\|\cdot\|$  из исказа Тврђења 2.  
(3) Доказати да је  $\Sigma := \{\xi \in C^0(E^u, E^s) \mid \xi(0) = 0, \|\xi\|^* < \infty\}$  са нормом

$$\|\xi\|^* := \sup \frac{\|\xi(v)\|_s}{\|v\|_u}$$

(видети и Тврђење 2 из 5. лекције) Банахов.

- (4) Нека је  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  линеарни хиперболички динамички систем,  $E = E^s \oplus E^u$  и  $\|\cdot\|$  норма из Задатка (M4). Како разлагање  $E = E^s \oplus E^u$  не зависи од тачке  $x \in \mathbb{R}^m$ , означимо са  $K_1^s := K_1^s(x)$  стабилни конус величине 1, тј.  $K_1^s := \{v \in \mathbb{R}^m \mid \|v_u\| \leq \|v_s\|\}$ . Нека је  $\tau(L) := \max\{\|L|_{E^s}\|_\infty, \|L^{-1}|_{E^u}\|_\infty\} < 1$  и  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  Липшицово са  $\text{Lip}(g) < 1 - \tau(L)$ ,  $g(0) = 0$ . Ако је  $f = g + L$ , тада важи

$$\begin{aligned} W^s(0, f) &= \{v \in \mathbb{R}^m \mid \exists a \geq 0, \|f^n(v)\| \leq a, \forall n \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^m \mid f^n(v) \in K_1^s, \forall n \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^m \mid \|f^n(v)\| \leq (\tau(L) + \text{Lip}(g))^n \|v\|, \forall n \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$

Доказати.

- (5) Доказати да из претходног задатка следи да се може изабрати довољно мало  $\delta$  у доказу Тврђења 2 из 5. лекције, такво да је  $\text{Graph}(\xi) \subseteq W^u(0, f)$ .  
(6) Доказати да  $\text{Lip}(g^r) \rightarrow 0$ , кад  $r \rightarrow 0$ , где је пресликавање  $g^r$  дефинисано у доказу Теореме 1 у 5. лекцији.  
(7) Шта су скупови  $\Lambda_\delta^s$ ,  $\Lambda_\delta^u$ ,  $W_\varepsilon^u(x^s)$ ,  $W_\varepsilon^s(x^u)$ ,  $W^s(0)$ ,  $W^u(0)$  у случају линеарног хиперболичног динамичког система,  $\Lambda = \{0\}$ ?  
(8) (а) Доказати Тврђење 7 са предавања.  
(б) Доказати да су стабилна и нестабилна многострукост глатке многострукости (одговарајућих димензија).