(К) Тополошка ентропија

(1) Доказати да све динамичке метрике d_n дефинишу исту топологију као и метрика d.

(2) Доказати да је $\mathrm{cov}(n, 2\varepsilon) \le \mathrm{span}(n, \varepsilon) \le \mathrm{sep}(n, \varepsilon) \le \mathrm{cov}(n, \varepsilon)$.

(3) Ако метрике d и d' индукују исту топологију на X, доказати да се тополошке ентропије дефинисане метрикама d и d' поклапају.

(4) Доказати следећа својства тополошке ентропије:
- (а) $h(f^m) = m \cdot h(f)$, за $m \in \mathbb{N}$;
- (б) ако је f реверзибилно, онда је $h(f^{-1}) = h(f)$, па је $h(f^m) = |m| \cdot h(f)$, за $m \in \mathbb{Z}$;
- (в) ако су A_j, $j = 1, \ldots, k$ затворени и инваријантни скупови и $X = \bigcup_j A_j$, тада је
$$h(f) = \max_j h(f|_{A_j}).$$

(5) Доказати следећа својства тополошке ентропије:
- (а) $h(f \times g) = h(f) + h(g)$;
- (б) ако је g фактор од f, онда је $h(f) \ge h(g)$.

(6) Доказати да су E_m, за $|m| > 1$, једнострани и двострани шифт, хиперболички торусни аутоморфизам, Смејлова потковица и соленоид експанзивна пресликавања.

(7) Доказати да је тополошка ентропија шифт пресликавања σ на простору једностраних или двостраних низова (Σ_m^+ или Σ_m) од m симбола једнака $\log m$. Доказати да је $h(E_m) = \log m$. Колика је тополошка ентропија Смејловог потковичастог пресликавања?

(8) Доказати да је тополошка ентропија соленоида једнака $\log 2$.

(9) Нека је $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Риманова сфера. Дата су пресликавања $f, g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ са
$$f(z) = z^2,\ f(\infty) = \infty, \quad g(z) = \frac{z^2}{2|z|},\ g(0) = 0,\ g(\infty) = \infty.$$
Израчунати $\deg(f)$, $\deg(g)$, $P_n(f)$ и $P_n(g)$, где је са $P_n(f)$ означена кардиналтност скупа периодичних тачака периода n.

(10) Нека су f и g пресликавања из претходног задатка. Доказати да је $h(f) = \log 2$ а $h(g) = 0$.

(11) Нека је $f = \frac{P}{Q}$ рационално пресликавање Риманове сфере, тј. нека су P и Q полиноми који немају заједнички фактор. Доказати да је $h(f) \ge \max \log\{\deg(P), \deg(Q)\}$.

(12) Нека је f пресликавање Риманове сфере, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Доказати да је $h(f) = 0$.