(J) Атрактори и репелери. Системи градијентног типа

(1) Нека је X компактан и $f : X \to X$ реверзибилан динамички систем. Доказати да за дати атрактор A дуални репелер R зависи само од A (а не и од изолатора U који учествује у дефиницији атрактора A).

(2) Нека $f, g : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Наћи све атракторе и репелере пресликавања f и g и $\mathcal{CR}(f)$ и $\mathcal{CR}(g)$.

(3) Нека је $f : [0,1] \to [0,1]$ реверзибилан динамички систем и нека је $f(0) = 0$. Доказати да је $\mathcal{CR}(f) = \mathrm{Fix}(f)$.

(4) Ако је $f : X \to X$ непрекидно и X компактан, и A атрактор за f, доказати да је $f(A) = A$.

(5) Ако је A атрактор доказати да постоји отворен скуп $U \supset A$ такав да је $\omega(x) \in A$ за свако $x \in U$. Доказати да обрнуто није тачно (тј. да скуп $\omega(x)$ не мора да буде садржан у атрактору). [Упутство: $x \mapsto x + 1/10 \sin^2(\pi x) \pmod 1$ на $\mathbb{S}^1$.]

(6) Нека је M глатка затворена многострукост и $F : M \to \mathbb{R}$ глатка функција са коначно много критичних тачака. Нека је ϕ_t негативни градијентни систем придружен функцији F ($d\phi_t/dt = -\nabla F(\phi_t)$). Доказати да за свако $x \in M$, $\phi_t(x)$ тежи ка критичној тачки функције F, кад $t \to \pm\infty$.

(7) Нека је X компактан метрички простор и $f : X \to X$ реверзибилан динамички систем градијентног типа. Претпоставимо да f допушта функцију Љапунова V такву да је $V(\mathrm{Fix}(f))$ коначан скуп. Доказати да је $\mathcal{CR}(f) = \mathrm{Fix}(f)$. [Упутство: (i) Доказати да за свако $c \in \mathbb{R} \setminus V(\mathrm{Fix}(f))$ постоји $\delta > 0$ такво да важи $V(x) < c + \delta \Rightarrow V(f(x)) < c$. (ii) За $z \notin \mathrm{Fix}(f)$ изабрати N такво да $V(f^k(z)) \notin V(\mathrm{Fix}(f))$ за свако $k \geq N$. (iii) За $x = f^N(z)$, $a := V(f(x))$, $b := V(x)$, изабрати δ из тачке (i) и изабрати $\eta := \min\{\delta, (b-a)/2\}$, и ε тдј. $d(x_1, x_2) < \varepsilon \Rightarrow |V(x_1) - V(x_2)| < \eta$. (iv) Доказати да не постоји ε-псеудоорбита која почиње у x. (v) Доказати да $x \notin \mathcal{CR}(f) \Rightarrow z \notin \mathcal{CR}(f)$.]

(8) Динамички систем је дефинисан диференцијалном једначином ($f(x,y) = \phi^1(x,y)$):

$$x' = -y + x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$y' = x + y(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ако је $X = \{x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\}$, доказати да $f : X \to X$. Наћи атракторе и репелере система f.