(И) Основни појмови у тополошкој динамици

(1) Доказати да су $\omega(x)$ и $\alpha(x)$ затворени и инваријантни скупови.
(2) Доказати да је $\mathcal{R}(f)$ инваријантан скуп.
(3) Доказати да је $NW(f)$ затворен и инваријантни скуп који садржи $\omega(x)$ и $\alpha(x)$ за свако x.
(4) Доказати да је $\overline{\mathcal{R}}(f) \subset NW(f)$.
(5) Доказати да је тачка x нелутајућа ако и само ако за сваку околину $U \ni x$ и свако $n_0 \in \mathbb{N}$ постоји $n \geq n_0$ за које важи $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.
(6) Доказати да су следећи услови еквивалентни.
 (а) $f : X \to X$ је минимално.
 (б) $\omega(x) = X$ за свако x.
 (в) За сваки непразан отворен скуп $U \subset X$ важи $\bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U) = X$.
 (г) $\overline{\mathcal{O}}^+(x) = X$ за свако x.
(7) Ако је f хомеоморфизам доказати да важи:

$$y \in \overline{\mathcal{O}(x)},\ z \in \overline{\mathcal{O}(y)} \ \Rightarrow\ z \in \overline{\mathcal{O}(x)}.$$

Ако је f непрекидно доказати да важи:

$$y \in \overline{\mathcal{O}^+(x)},\ z \in \overline{\mathcal{O}^+(y)} \ \Rightarrow\ z \in \overline{\mathcal{O}^+(x)}.$$

(8) Доказати да за $E_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ постоје тачке које нису рекурентне али нису ни коначно периодичне.
(9) За хиперболички торусни аутоморфизам $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ доказати да важи:
 (а) $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathbb{T}^2$ (одакле из Задатка 4. закључујемо $NW(A) = \mathbb{T}^2$);
 (б) $\mathcal{R}(A) \neq \mathbb{T}^2$.
(10) Доказати да је хомеоморфизам f минималан ако и само ако за сваки непразан отворен скуп $U \subset X$ постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да је $\bigcup_{j=-n}^{n} f^j(U) = X$.
(11) Доказати да је хомеоморфизам f компактног метричког простора X минималан ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $N = N(\varepsilon)$ такво да је за свако $x \in X$ скуп $\{x, f(x), \ldots, f^N(x)\}$ ε-густ у X.
(12) Нека су X и Y компактни метрички простори и $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ непрекидна пресликавања. Доказати да је $\overline{\mathcal{O}^+_{f\times g}(x,y)} = \overline{\mathcal{O}^+_f(x)} \times \overline{\mathcal{O}^+_g(y)}$ ако и само је $(x, g(y)), (f(x), y) \in \overline{\mathcal{O}^+_{f\times g}(x,y)}$. Нека су f и g минимални. Наћи потребне и довољне услове да $f \times g$ буде минимално.
(13) Доказати да је $f \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ минималан ако и само је тополошки транзитиван.
(14) * Наћи пример динамичког система за који важи $NW(f) \not\subset \overline{\mathcal{R}(f)}$.
(15) Ако је $f : X \to X$ хомеоморфизам, доказати да је f тополошки транзитивно ако и само ако је то f^{-1}.
(16) Нека је X метрички простор са бар једном изолованом тачком и $f : X \to X$ тополошки транзитивно. Доказати да је X коначан скуп и да је $\mathcal{O}^+_x = X$ за свако $x \in X$.
(17) Доказати да је тополошки транзитивно пресликавање метричког простора које је и Липшицово са Липшицовом константом 1 обавезно минимално.
(18) Ако је f тополошки транзитивно пресликавање доказати да за свака два отворена скупа постоји бесконачно много $m \geq 0$ за које важи $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.
(19) Нека је X метрички простор без изолованих тачака.
 а)* Нека је $f : X \to X$ пресликавање за које важи:

$$\text{за свака два } U, V \neq \emptyset \text{ отворена, постоје } m, n \in \mathbb{N}_0, \text{ тдј. } f^{-m}(U) \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset. \qquad (\heartsuit)$$

 Доказати да из $(\heartsuit)$ следи да за сваки произвољан отворен непразан $\mathcal{O}$ постоји бесконачно много $n \in \mathbb{N}$ таквих да је

$$f^{-n}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset.$$

 б) Доказати да је $f : X \to X$ тополошки транзитивно ако и само важи $(\heartsuit)$. [Упутство за смер $\Leftarrow$: за дате U и V постоји $k \geq 0$ тдј. или $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ или $U \cap f^k(V) \neq \emptyset$. У другом случају применимо тачку б) на скуп $\mathcal{O} := V \cap f^{-k}(U)$.]
 в) Доказати да је пресликавање $f : X \to X$ тополошки транзитивно ако и само за свако $\varepsilon > 0$ и сваке две тачке $x, y \in X$ постоји $z \in X$ и $m, n \geq 0$ такви да је $d(f^m(z), x)) < \varepsilon$ и $d(f^n(z), y) < \varepsilon$.
(20) Доказати да је $f : X \to X$ тополошки транзитивно ако постоји тачка x за коју важи $\omega(x) = X$. Ако је X комплетан и сепарабилан, доказати да ако је f тополошки транзитивно онда постоји тачка x за коју важи $\omega(x) = X$.
(21) Ако X нема изолованих тачака и $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$, онда је $\overline{\omega(x)} = X$. Доказати. Примером показати да ово није тачно ако X има изолованих тачака.
(22) Наћи пример динамичког система за који постоји x такво да је $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$ али не постоји x за које важи $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$.
(23) Да ли је производ два динамичка система која имају густу орбиту има густу орбиту? Да ли фактор система који има густу орбиту, такође има густу орбиту?

(24) Нека је $f : X \to X$ хомеоморфизам. Ако f има неконстантни први интеграл (непрекидну функцију која је константна дуж орбита) или функцију Љапунова (непрекидну функцију која је неопадајућа дуж орбита), тада f нема густу орбиту. Доказати.

(25) Нека динамички систем $f : X \to X$ има барем две орбите и нека важи један од следећа два услова:
- X нема изолованих тачака
- f је хомеоморфизам.

Доказати да ако f има привлачећу периодичну тачку, тада он нема густу орбиту.

(26) Нека је α ирационалан и $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ хомеоморфизам торуса дефинисан са $f(x, y) = (x + \alpha, x + y)$.
 (а) Доказати да је сваки непразан, отворен, f-инваријантан скуп густ, тј. да је f тополошки транзитивно.
 (б) Нека је орбита тачке (x_0, y_0) густа. Доказати да је за свако $y \in \mathbb{S}^1$, $\overline{\mathcal{O}^+(x_0, y)} = \mathbb{T}^2$. Доказати ако је скуп $\bigcup_{k=0}^n f^k(x_0, y_0)$ ε-густ, да је онда и $\bigcup_{k=0}^n f^k(x_0, y)$ ε-густ.
 (в) Показати да је свака (напред) орбита густа, тј. да је f минимално.

(27) Допунити доказ Поенкареове теореме: доказати да је пресликавање

$$T : \Lambda_{x_0} \to \Omega, \quad T : F^n(x_0) + m \mapsto n\rho + m\},$$

где су

$$\Lambda_{x_0} := \{F^n(x_0) + m \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \pi^{-1}\left(\mathcal{O}_f(x_0)\right)$$
$$\Omega := \{n\rho + m \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \pi^{-1}(\mathcal{O}_{R_\rho}(0)),$$

монотоно.

(28) Шта можемо рећи о јединствености хомеоморфизма φ који успоставља тополошку конјугованост у Поенкареовој теореми? [Упутство: $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + \rho \mod 1$, нека су φ_1 и φ_2 два таква хомеоморфизма, $\varphi_0 := \varphi_1 - \varphi_2$, какво је пресликавање φ_0?)

(29) Нека је $f \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ и $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Доказати да $\omega(x)$ не зависи од x.
 а) Ако је f тополошки транзитивно, доказати да је $\omega(x) = \mathbb{S}^1$.
 б) Ако f није тополошки транзитивно, доказати да је $\omega(x)$ нигде густ скуп без изолованих тачака.

(30) Дати пример хомеоморфизма f круга који мења оријентацију таквог да је $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$ али немају све тачке исти период.

(31) Нека је $f \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ и $\rho(f) \in \mathbb{Q}$. Доказати да је $\Omega(f) = \mathrm{Per}(f)$

(32) Доказати да су шифт пресликавање, $E_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ и хиперболички торусни аутоморфизам $A : \mathbb{T}^{\to}\mathbb{T}^2$ хаотична пресликавања.

(33) Нека је X метрички простор без изолованих тачака. Доказати да је f хаотично ако и само за сваку коначну фамилију $\{U_1, \ldots, U_m\}$ отворених непразних скупова постоји периодична орбита $\mathcal{O}_x^+$ која их све сече.