(Ђ) Торусни аутоморфизам

(1) Нека је A несингуларна 2×2 целобројна матрица и $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ придружени торусни ендоморфизам.
  (а) Доказати да је свака тачка са рационалним координатама коначно периодична.
  (б) Ако је A хиперболички, доказати да свака коначно периодична тачка има рационалне координате.

(2) Доказати да су сопствене вредности дводимензионог хиперболичког торусног аутоморфизма ирационални бројеви.

(3) Нека је $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ торусни аутоморфизам дефинисан матрицом $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$. Доказати да је скуп периодичних тачака густ у $\mathbb{T}^2$. Чему је једнак скуп периодичних тачака ако је A хиперболички аутоморфизам?

(4) Нека је $\alpha \notin \mathbb{Q}$ и ϕ_t кретање торуса дефинисано кретањем у равни

$$\frac{d\phi_t}{dt} = (1, \alpha), \quad \phi_0 = \mathrm{Id},$$

тј.

$$\phi_t : (x, y) \mapsto (x + t \bmod 1, y + \alpha t \bmod 1).$$

За $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ дефинишимо просторно усредњење као

$$\hat{F} := \iint_{\mathbb{T}^2} F(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1\, d\varphi_2$$

и временско усредњење у тачки $\boldsymbol{\varphi}_0$ као

$$F^*(\boldsymbol{\varphi}_0) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\phi_t(\boldsymbol{\varphi}_0))\, dt.$$

  (а) Доказати да $\hat{F} = F^*(\boldsymbol{\varphi}_0)$ за сваку непрекидну функцију $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ (својство ергодичности кретања ϕ_t).
  (б) Нека је $D \subset \mathbb{T}^2$ отворена кугла. Доказати да је

$$\lim_{T\to\infty} \frac{m\{t \in [0, T] \mid \phi_t(\boldsymbol{\varphi}_0) \in D\}}{T} = m(D).$$

  (в) Доказати да је за свако $\boldsymbol{\varphi}_0$ орбита $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varphi}_0}$ густа.
  (г) Какво је кретање ϕ_t за $\alpha \in \mathbb{Q}$?
  (д) Доказати да су стабилне и нестабилне многострукости хиперболичког торусног аутоморфизма густе у $\mathbb{T}^2$.

(5) Доказати да је број фиксних тачака хиперболичког торусног аутоморфизма једнак $|\det(A - E)|$ а број периодичих тачака периода n једнак $|\det(A^n - E)|$.