(A) Хомеоморфизми круга

(1) Нека је R_α ротација круга за угао α. Доказати да за свако $k \in \mathbb{Z}$ постоји непрекидна полуконјугација круга из R_α у $R_{k\alpha}$.

(2) Дат је низ $2, 4, 8, 1, 3, 6, \dots$ (a_n је прва цифра броја 2^n). Да ли се у овом низу чешће појављује цифра 7 или 8 (да ли је $\lim_{N\to\infty} \frac{\sharp\{n | a_n = a, n = 1, \dots, N\}}{N}$ већи за $a = 7$ или $a = 8$)?

(3) Доказати да за било који коначан низ децималних цифара постоји $n \in \mathbb{N}$ такво децимални запис броја 2^n почиње тим низом.

(4) * Доказати да су R_α и R_β конјуговани хомеоморфизмом ако и само ако је $\alpha = \pm\beta \bmod 1$.

(5) Хомеоморфизам круга $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ чува оријентацију ако за сваке три тачке $x, y, z \in \mathbb{S}^1$ које су поређане у позитивном смеру обиласка кружнице редом: x, y, z, исто важи за $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$, а мења оријентацију ако су поређане редом $f(y)$, $f(x)$, $f(z)$. Доказати да хомеоморфизам круга или чува или мења оријентацију.

(6) Подизање хомеоморфизма $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ је сваки хомеоморфизам скупа $\mathbb{R}$ такав да важи $f \circ \pi = \pi \circ F$, где је $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ количничко пресликвање, $\pi(x) = \{x\} = x - [x] \in [0, 1)$. Доказати:
   (а) пресликавање F постоји
   (б) F је јединствено до на додавање целог броја
   (в) ако f чува оријентацију, онда је F строго растуће и $F(x + 1) = F(x) + 1$
   (г) ако је F подизање пресликавања f, онда је F^n подизање пресликавања f^n за свако $n \in \mathbb{Z}$
   (д) свако непрекидно строго монотоно пресликавање за које важи $F(x+1) = F(x)+1$ је подизање неког хомеоморфизма f круга $\mathbb{S}^1$ које чува оријентацију.

(7) Нека је a_n низ реалних бројева за који важи
$$a_{m+n} \le a_n + a_m + 1.$$
Доказати да је
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n + 1}{n},$$
где инфимум на десној страни може бити и $-\infty$ (варијанта Фекетеове леме).

(8) Нека је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам круга који чува оријентацију и F подизање хомеоморфизма f. Нека је $x \in \mathbb{S}^1$. Дефинишимо ротациони број подизања F као
$$\rho(F) := \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n}$$
и ротациони број хомеоморфизма f као
$$\rho(f) := \rho(F) \bmod 1.$$
Доказати да $\rho(F)$ добро дефинисан (да лимес постоји у $\mathbb{R}$ и не зависи од $x \in \mathbb{S}^1$) и да $\rho(f)$ не зависи од подизања F.

(9) * Изразити $\rho(F^k)$ и $\rho(F^{-1})$ преко $\rho(F)$.

(10) Нека хомеоморфизам $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ мења оријентацију. Доказати да f има тачно две фиксне тачке. Доказати да f^2 чува оријентацију и да је $\rho(f^2) = 0$.

(11) Нека је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам круга који чува оријентацију. Доказати да је $\rho(F) \in \mathbb{Z}$ ако и само ако постоји фиксна тачка хомеоморфизма f, а $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ ако и само ако постоји периодична тачка хомеоморфизма f.

(12) Нека је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам који чува оријентацију такав да је $\rho(f) = p/q$ где су $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ узајамно прости. Доказати да све периодичне тачке имају исти минимални период q.

(13) Доказати да ако је $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, и $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам који чува оријентацију, тада свака орбита тежи периодичној, тј. да за свако $x \in \mathbb{S}^1$ постоји периодична тачка p таква да је
$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0.$$