2. Тополошка ентропија

(Овим би требало да буде покривено градиво до краја марта, или мало више.)

Тополошка ентропија је нумеричка инваријанта динамичког система која мери извесну сложеност система. Она броји асимптотски (експоненцијални) раст броја тачака у X које су у неком смислу довољне за опис целог система.

1 Дефиниција и својства

Претпоставимо да је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \to X$ непрекидно. Динамичком систему (X, f) можемо да придружимо *динамичку метрику*, за сваки природан број $n \in \mathbb{N}_0$:

$$d_n(x, y) := \max_{j \in \{0, \ldots, n-1\}} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Свака од ових метрика индукује исту топологију на X (Домаћи (К1)). Пре неко што дефинишемо тополошку ентропију увешћемо неколико појмова.

Нека је $\varepsilon > 0$.

Дефиниција 1. Скуп $A \subset X$ називамо (n, ε)-*разапињућим скупом* ако за свако $x \in X$ постоји $y \in A$такво да је $d_n(x, y) < \varepsilon$. Најмања кардиналност свих (n, ε)-разапињућих скупова означавамо са $\operatorname{span}(n, \varepsilon, f)$ или само са $\operatorname{span}(n, \varepsilon)$, ако је јасно о ком се пресликавању ради. Овај број је коначан због компактности скупа X. ⋄

Дефиниција 2. Скуп $A \subset X$ називамо (n, ε)-*раздвојеним скупом* ако за свако $x, y \in A$ важи $d_n(x, y) \geq \varepsilon$. Сваки (n, ε)-раздвојени скуп је коначан и највећа кардиналност свих (n, ε)-раздвојених скупова означавамо са $\operatorname{sep}(n, \varepsilon, f)$ или само са $\operatorname{sep}(n, \varepsilon)$, ако је јасно о ком се пресликавању ради. ⋄

Дефиниција 3. Најмању кардиналност свих покривача скупа X скуповима који су у метрици d_n дијаметра мањег од ε означавамо са $\operatorname{cov}(n, \varepsilon, f)$ или само са $\operatorname{cov}(n, \varepsilon)$, ако је јасно о ком се пресликавању ради. ⋄

Тврђење 4. $\operatorname{cov}(n, 2\varepsilon) \leq \operatorname{span}(n, \varepsilon) \leq \operatorname{sep}(n, \varepsilon) \leq \operatorname{cov}(n, \varepsilon)$.

Доказ. Домаћи (К2). □

Лема 5. *Лимес* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{cov}(n, \varepsilon)$ *постоји и коначан је.*

Доказ. Ако скуп U има у метрици d_m дијаметар мањи од ε, а скуп V има у метрици d_n дијаметар мањи од ε, онда скуп $U \cap f^{-m}(V)$ има у метрици d_{m+n} дијаметар мањи од ε. Ако су $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ покривачи скупа X скуповима дијаметара мањих од ε у метрикама d_m и d_n редом, тада је

$$\mathcal{W} := \{U \cap f^{-m}(V) \mid U \in \mathcal{U}, \, V \in \mathcal{V}\}$$

покривач скуповима дијаметра мањег од ε у метрици d_{m+n}. Кардиналност скупа $\mathcal{W}$ је

$$\sharp\mathcal{W} = \sharp\mathcal{U} \cdot \sharp\mathcal{V},$$

па је

$$\operatorname{cov}(m+n,\varepsilon) \le \operatorname{cov}(m,\varepsilon) \cdot \operatorname{cov}(n,\varepsilon).$$

Тврђење сада следи из Фекетеове леме примењене на низ $a_n := \log \operatorname{cov}(n,\varepsilon)$. $\square$

Означимо са

$$h_\varepsilon := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{cov}(n,\varepsilon).$$

Из Тврђења 4 следи да је

$$h_\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{sep}(n,\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{span}(n,\varepsilon).$$

Величина h_ε опада по ε. Сада можемо да дефинишемо тополошку ентропију као

$$h(f) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} h_\varepsilon(f) \in [0,\infty].$$

Тврђење 6. *Тополошка ентропија не зависи од метрике d већ само од топологије коју ова метрика дефинише.*

Доказ. Домаћи (К3) $\square$

Последица 7. *Тополошка ентропија је инваријанта тополошке конјугованости.*

Доказ. Нека је $\phi : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ хомеоморфизам који успоставља тополошку конјугованост. Тада метрика d' на X дефинисана са

$$d'(x,y) := d_Y(\phi(x), \phi(y))$$

индукује исту топологију као и метрика d_X, па инваријантност следи из Тврђења 6. $\square$

Тврђење 8. *Тополошка ентропија има следећа својства:*

1. *$h(f^m) = m \cdot h(f)$, за $m \in \mathbb{N}$;*
2. *ако је f реверзибилно, онда је $h(f^{-1}) = h(f)$, па је $h(f^m) = |m| \cdot h(f)$, за $m \in \mathbb{Z}$;*
3. *ако су A_j, $j = 1, \ldots, k$ затворени и инваријантни скупови ($f(A_j) \subset A_j$) и $X = \bigcup_j A_j$, тада је*

   $$h(f) = \max_j h(f|_{A_j})$$

   (посебно, ако је $A \subset X$ затворен и инваријантан скуп, онда је $h(f|_A) \le h(f)$);
4. *ако $f : X \to X$, $g : Y \to Y$, и пресликавање $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ је дато са*

   $$(f \times g)(x,y) ::= (f(x), g(y)),$$

   тада је $h(f \times g) = h(f) + h(g)$;
5. *ако је g фактор од f, тј. f екстензија од g, онда је $h(f) \ge h(g)$.*

Доказ. Домаћи (К4) и (К5). $\square$

2 Примери

Сада ћемо видети неке примере рачунања тополошке ентропије.

Дефиниција 9. Динамички систем $f : X \to X$ називамо *позитивно експанзивним* ако постоји $\delta > 0$ тако да за сваке две различите тачке $x, y \in X$ постоји $n \geq 0$ такво да је $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$. Хомеоморфизам $f : X \to X$ називамо *експанзивним* ако постоји $\delta > 0$ тако да за сваке две различите тачке $x, y \in X$ постоји $n \in \mathbb{Z}$ такво да је $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$. Број δ називамо *константом екпсанзивности*, у оба случаја. $\diamond$

Примери (позитовно) експанзивних пресликавања су E_m, једнострани и двострани шифтови, хиперболички торусни аутоморфизми, Смејлова потковица и соленоид (Домаћи (К6)).

Тврђење 10. *Нека је f експанзивно са константом експанзивности δ. Тада је $h(f) = h_\varepsilon(f)$ за $\varepsilon < \delta$.*

Доказ. Нека је $0 < \gamma < \varepsilon < \delta$. Доказаћемо да је $h_\gamma(f) \leq h_\varepsilon(f)$, одакле ће тврђење следити из монотоности функције $\varepsilon \mapsto h_\varepsilon(f)$.

Посматрајмо скуп
$$K := \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) \geq \gamma\}.$$
За свако $(x, y) \in K$ постоји $j = j(x, y) \in \mathbb{Z}$ такво да је $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \delta > \varepsilon$. Како је скуп K компактан, то постоји $k \in \mathbb{N}$ такво да, за свако $(x, y) \in K$ постоји j такво да је $|j| \leq k$ и $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \delta > \varepsilon$. Нека је A произвољан (n, γ)-раздвојен скуп. Тада је скуп $f^{-k}(A)$ $(n + 2k, \varepsilon)$-раздвојен. Заиста, ако је $x, y \in f^{-k}(A)$, онда је $f^k(x), f^k(y) \in A$, па је, за неко $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $d(f^{i+k}(x)), f^{i+k}(y)) \geq \gamma$, па је за неко j, такво да је $|j| \leq k$, $d(f^{i+k+j}(x)), f^{i+k+j}(y)) \geq \gamma$. Одавде закључујемо да је

$$\operatorname{sep}(n, \gamma) \leq \operatorname{sep}(n + 2k, \varepsilon),$$

одакле узимањем лимеса закључујемо $h_\gamma(f) \leq h_\varepsilon(f)$. $\square$

Израчунаћемо сада тополошку ентропију за хиперболички торусни аутоморфизам.

Тврђење 11. *Нека је хиперболичка матрица $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ таква да је $\det A = 1$. Означимо истим словом A индуковани торусни хиперболички аутоморфизам. Нека су λ и $1/\lambda$ сопствене вредности матрице A такве да је $|\lambda| > 1$. Тада је $h(A) = \log|\lambda|$.*

Доказ. Прво ћемо доказати да је $h(A) \geq \log|\lambda|$. Метрика на торусу d индукована је метриком $d_{\mathbb{R}^2}$ у равни са

$$d([x], [y]) := \min\{d_{\mathbb{R}^2}(x, y) \mid x \in [x],\, y \in [y]\}.$$

Изабраћемо метрику на $\mathbb{R}^2$ која је погоднија за рачунање од еуклидске а еквивалентна је еуклидској. Нека је u јединични сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ а v јединични сопствени вектор који одговара сопственој вредности $1/\lambda$. Ако је $x - y = \alpha u + \beta v$, дефинишимо

$$d(x, y) := \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

Метрике d и еуклидска метрика су еквивалентне, па исто важи и за индуковане метрике на торусу. Ако је

$$x = \alpha_x u + \beta_x v, \quad x = \alpha_y u + \beta_y v,$$

тада је

$$d(A^j x, A^j y) = \max\{|(\alpha_x - \alpha_y)\lambda^j|, |(\beta_x - \beta_y) 1/\lambda^j|\}.$$

Одавде није тешко извести да је кугла у динамичкој метрици d_n полупречника ε паралелограм са страницама дужине $2\varepsilon|\lambda|^{-n}$ и 2ε. Његова еуклидска површина је $4\varepsilon^2|\lambda|^{-n}$. Зато је најмањи број оваквих паралелограма (односно d_n-кугли) потребних да покрију торус једнак

$$\frac{P(\mathbb{T}^2)}{4\varepsilon^2|\lambda|^{-n}} = \frac{|\lambda|^n}{4\varepsilon^2}.$$

Како је скуп дијаметра ε садржан у лопти полупречника ε, то је $\mathrm{cov}(s, \varepsilon) \geq |\lambda|^n/4\varepsilon^2$, одакле добијамо $h(A) \geq \log|\lambda|$.

За доказ друге неједнакости, приметимо да се раван може поплочати паралелограмима, тј. d_n-куглама полупречника ε. За довољно мало ε, сви паралелограми који покривају квадрат $[0,1]\times[0,1]$ садржани су у квадрату $[-1,2]\times[-1,2]$, па број паралелограма који секу $[0,1]\times[0,1]$ није већи од односа

$$\frac{P([-1,2]\times[-1,2])}{P(B_{d_n}(\varepsilon))} = \frac{9|\lambda|^2}{c\varepsilon^2},$$

где је c позитивна константа. Како је дијаметар кугле полупречника ε једнак 2ε, имамо да је $\mathrm{cov}(n, 2\varepsilon) \leq 9|\lambda|^2/c\varepsilon^2$, одакле добијамо $h(A) \leq \log|\lambda|$. $\square$

Може се показати да је тополошка ентропија хиперболичог торусног аутоморфима са сопственим вредностима λ_j у произвољној дименизји једнака $\sum_{|\lambda|_j>1}\log|\lambda_j|$.

Важе и следеће чињенице (доказ остављамо за домаћи):

- Ако је $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ шифт на простору двострних низова Σ_m од m симбола, онда је $h(\sigma) = \log m$.
- $h(E_m) = \log m$.
- Ако је F соленоид, онда је $h(f) = \log 2$.

3 Ентропија и неке друге динамичке инваријанте

Тополошка ентропија је једна мера комплексности динамичког система. Понекад је довољно занимљиво и тешко питање утврдити да ли је ентропија неког система позитивна или једнака нули. Постоје бројне инваријанте које мере сложеност система, једна од њих је хаос. Питање постојања везе између хаотичних система и система са позитивном тополошком ентропијом је природно и доста проучавано, а и даље је предмет истраживања. На пример, позитивна тополошка ентропија повлачи неку врсту хаоса (Ли-Јорков, који овде нисмо дефинисали) али не важи и обратно.

Што се тиче хаоса који смо дефинисали на курсу (Девејнијев), ово питање је донекле без смисла јер је хаос глобални феномен (будући да подразумева транзитивност), док позитивна ентропија може да се локализује на неки подскуп динамичког система (због тачке 3. у Тврђењу 8).

Овде ћемо навести везу тополошке ентропије и неких других динамичких инваријанти, без доказа. Неке од ових тврдњи су доказане у [2].

3.1 Једнодимензиона динамика

- Нека је I сегмент и $f : I \to I$и део-по-део монотона функција. Означимо са c_n број интервала монотоности функције f^n. Тада је

$$h(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log c_n}{n}.$$

- Нека је I сегмент и $f : I \to I$ тополошки транзитивно пресликавање. Тада је $h(f) > 0$. (Ово тврђење не важи већ на кругу.)

- Нека је I сегмент и $f : I \to I$. Тада је

$$\limsup_{n\to\infty} \sharp \{x \in I \mid f^n x = x\} \geq h(f).$$

- $h(E_m) = \log m$.

- Транзитивна пресликавања круга су или конјугована ирационалној ротацији или је $h(f) > 0$.

3.2 Глатки случај

Споменимо прво везу између динамике и степена пресликавања. Ако су M и N глатке, затворене и оријентисане многострукости исте димензије, ω форма запремине на N и $f : M \to M$ глатко, тада степен пресликавања f можемо да дефинишемо као

$$\deg f := \frac{\int_M f^*\omega}{\int_N \omega}.$$

Алтернативно, за $y \in N$ регуларну вредност пресликавања f, степен може да се дефинише као

$$deg f := \sum_{x\in f^{-1}(y)} \varepsilon_x$$

где је $\varepsilon_x = \pm$ у зависности од тога да ли $df(x)$ чува или мења оријентацију. Сардова теорема нам каже да је скоро свако $y \in N$ регуларна вредност (довољно глатког) пресликавања f. Степен пресликавања је хомотопска инваријанта и важи $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$. Ако је $\dim M = \dim N = n$ и $[M]$ генератор хомолошке групе највишег реда $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$, онда је $f_*([M]) = \deg f \cdot [N]$.

Детаљи о степену пресликавања могу се видети у нпр. [1] (или [2]).

Најједноставнија веза између степена пресликавања и динамике је следећа. Ако је $|\deg f| \geq 2$, тада је

$$|\deg f^n| = |\deg f|^n \geq 2^n,$$

па је, за скоро свако $y \in N$ кардиналност скупа $f^{-n}(y)$ већа или једнака од 2^n.

Доказ следеће теореме која нам даје финију везу степена и динамике може се наћи у [2].

Теорема 12. (Мишуревич-Пжитицки, 1977.) *Ако су M и $f : M \to M$ класе C^1 онда је $h(f) \geq \log|\deg f|$.* $\square$

Споменимо још једну динамичку инваријанту пресликавања глатког пресликавања глатке многострукости. Нека је

$$\Sigma_j := \left\{\sigma : [0,1]^j \to M \mid \sigma \text{ глатко}\right\}.$$

Дефинишимо

$$v_j(f) := \sup_{\sigma\in\Sigma_j} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \mathrm{Vol}(f^n \circ \sigma([0,1]^j))}{n}$$

и *асимптотски раст запремине* пресликавања f као:

$$v(f) := \max_{j=1,\dots,\dim M} v_j(f).$$

Важи следећа теорема.

Теорема 13. (Јомдин, 1987.) *Ако је f класе C^∞, онда је $v(f) = h(f)$.* $\square$

Постоје и нека уопштења Јомдинове теореме за случај да је f мање глаткости (на пример $v_j(f) \geq h(f)$ за f класе C^j).

На крају наводимо један отворени проблем који даје везу између динамике и једне тополошке инваријанте. Нека је $\mathrm{sp}(f_{*,j})$ највећи модул сопствених вредности линеарног пресликавања

$$f_{*,j} : H_j(M,\mathbb{R}) \to H_j(M,\mathbb{R}).$$

Дефинишимо *спектрални радијус* пресликавања f као

$$\mathrm{sp}(f) := \max_{j=0,\dots,\dim M} \mathrm{sp}(f_{*,j}).$$

Хипотеза ентропије гласи: ако је f класе C^1 онда је

$$h(f) \geq \log \mathrm{sp}(f).$$

У случају да је f класе C^∞ хипотезу ентропије је доказао Јомдин. Познато да је да хипотеза ентропије није тачна за Липшицова пресликавања.

Литература.

[1] В. Драговић, Д. Милинковић, *Анализа на многострукостима*, Математички факултет у Београду, 2003.

[2] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge university press, 1995.