(А) Хомеоморфизми круга

(1) Нека је R_α ротација круга за угао α. Доказати да за свако $k \in \mathbb{Z}$ постоји непрекидна полуконјугација круга из R_α у $R_{k\alpha}$.
(2) Дат је низ $2, 4, 8, 1, 3, 6, \dots$ (a_n је прва цифра броја 2^n). Да ли се у овом низу чешће појављује цифра 7 или 8 (да ли је $\lim_{N\to\infty} \frac{\sharp\{n|a_n=a, n=1,\dots,N\}}{N}$ већи за $a=7$ или $a=8$)?
(3) Доказати да за било који коначан низ децималних цифара постоји $n \in \mathbb{N}$ такво децимални запис броја 2^n почиње тим низом.
(4) * Доказати да су R_α и R_β конјуговани хомеоморфизмом ако и само ако је $\alpha = \pm\beta \bmod 1$.
(5) Хомеоморфизам круга $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ чува оријентацију ако за сваке три тачке $x, y, z \in \mathbb{S}^1$ које су поређане у позитивном смеру обиласка кружнице редом: x, y, z, исто важи за $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$, а мења оријентацију ако су поређане редом $f(y)$, $f(x)$, $f(z)$. Доказати да хомеоморфизам круга или чува или мења оријентацију.
(6) Подизање хомеоморфизма $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ је сваки хомеоморфизам скупа $\mathbb{R}$ такав да важи $f \circ \pi = \pi \circ F$, где је $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ количничко пресликавање, $\pi(x) = \{x\} = x - [x] \in [0, 1)$. Доказати:
  (а) пресликавање F постоји
  (б) F је јединствено до на додавање целог броја
  (в) ако f чува оријентацију, онда је F строго растуће и $F(x + 1) = F(x) + 1$
  (г) ако је F подизање пресликавања f, онда је F^n подизање пресликавања f^n за свако $n \in \mathbb{Z}$
  (д) свако непрекидно строго монотоно пресликавање за које важи $F(x+1) = F(x)+1$ је подизање неког хомеоморфизма f круга $\mathbb{S}^1$ које чува оријентацију.
(7) Нека је a_n низ реалних бројева за који важи

$$a_{m+n} \le a_n + a_m + 1.$$

Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n + 1}{n},$$

где инфимум на десној страни може бити и $-\infty$ (варијанта Фекетеове леме).
(8) Изразити $\rho(F^k)$ и $\rho(F^{-1})$ преко $\rho(F)$.
(9) Нека хомеоморфизам $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ мења оријентацију. Доказати да f има тачно две фиксне тачке. Доказати да f^2 чува оријентацију и да је $\rho(f^2) = 0$.
(10) Нека је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам који чува оријентацију такав да је $\rho(f) = p/q$ где су $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ узајамно прости. Доказати да све периодичне тачке имају исти минимални период q.
(11) Доказати да ако је $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, и $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам који чува оријентацију, тада свака орбита тежи периодичној, тј. да за свако $x \in \mathbb{S}^1$ постоји периодична тачка p таква да је

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0.$$

(Б) Пресликавање E_m

(1) Доказати да пресликавање E_m чува Лебегову меру круга, тј. да важи $\lambda(E_m^{-1}(A)) = \lambda(A)$ за сваки мерљив скуп $A \subseteq \mathbb{S}^1$.
(2) Доказати да је пресликавање $\sigma : \Sigma \to \mathbb{S}^1$, $\sigma(\{x_n\}) = \sum \frac{x_i}{m^i}$ непрекидно (у односу на Тихоновљеву топологију).
(3) Доказати да је $E_k \circ E_l = E_l \circ E_k = E_{kl}$. Када важи $E_k \circ R_\alpha = R_\alpha \circ E_k$?
(4) Доказати да је скуп тачака $x \in \mathbb{S}^1$ чија је орбита $\mathcal{O}_{E_m}(x)$ густа непребројив.
(5) Доказати да је скуп

$$C := \{x \in [0, 1] \mid E_3^k(x) \notin (1/3, 2/3), \forall k \in \mathbb{N}_0\}$$

стандардни Канторов скуп.
(6) Наћи десни инверз пресликавања $\phi : \Sigma \to \mathbb{S}^1$, $\phi(x) = \sum \frac{x_i}{m^i}$, за $x = (x_1, x_2, \dots)$.
(7) * Доказати да скуп тачака $x \in \mathbb{S}^1$ чија је орбита $\mathcal{O}_{E_m}(x)$ густа има Лебегову меру 1.

(В) Шифтови и подшифтови

(1) Доказати да метрика $d(x,y) = 2^{-k}$, где је
$$k = \min\{|m| \mid x_m \neq y_m\}$$
генерише Тихоновљеву топологију.

(2) Нека је A матрица нула и јединица. Теме v_j може бити *достигнуто у n корака* из темена v_i ако постоји пут који се састоји од n ивица од v_i до v_j дуж усмерених ивица графа Γ_A. Која својства матрице A одговарају следећим својствима графа Γ_A?
  (а) Свако теме може бити достигнуто из неког другог темена.
  (б) Не постоји крајње теме, тј. постоји барем једна директна ивица која полази из сваког темена.
  (в) Свако теме може бити достигнуто у једном кораку из сваког другог темена.
  (г) Свако теме може бити достигнуто у тачно n корака из сваког другог темена.

(3) Нека је A матрица нула и јединица. Доказати:
  (а) Број фиксних тачака у Σ_A (или Σ_A^+) је траг матрице A.
  (б) Број дозвољених речи дужине $n+1$ који почињу у i и завршавају се у j је a_{ij}, где је $A^n = [a_{ij}]$.
  (в) Број периодичних тачака периода n у Σ_A (или Σ_A^+) је траг матрице A^n.

(4) Нека је A матрица нула и јединица и $a_{ij} > 0$, где је $A^n = [a_{ij}]$ за неко n. Доказати да су периодичне тачке густе (за шифт у Σ_A) и да постоји густа орбита.

(Г) Логистичка пресликавања

(1) Доказати да је шатор пресликавање $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = 2\min\{x, 1-x\}$ конјуговано логистичком q_4 $(\mu = 4)$.
(2) Показати да, за $\mu > 1$, за свако $x \notin [0,1]$, $q_\mu^n(x) \to -\infty$, кад $n \to \infty$.
(3) Доказати да је одбијајућа или привлачећа фиксна тачка изолована фиксна тачка.
(4) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ пресликавање класе C^1 и p фиксна тачка. Доказати: ако је $|f'(p)| < 1$, тада је p привлачећа, а ако је $|f'(p)| > 1$ одбијајућа фиксна тачка.
(5) * Нека је $\mu \in (1,3)$. Доказати да за свако $x \in [0,1]$ $q_\mu^n(x)$ тежи ка фиксној тачки пресликавања q_μ.
(6) Да ли су $x_1 = 0$ и $x_2 = 1 - 1/\mu$ привлачеће или одбијајуће фиксне тачке за q_μ у случају $\mu = 1$ и $\mu = 3$?
(7) Доказати да за, $\mu > 4$, постоји периодична тачка за q_μ периода три, која није фиксна.
(8) Нека је $\mu > 4$ и $p_2 \in [1/\mu, 1/2]$ периодична тачка периода 2. Да ли је периодична орбита $\mathcal{O}(p_2)$ привлачећа или одбијајућа?

(Д) Гаусово пресликавање

(1) Шта су фиксне тачке Гаусове трансформације?
(2) Доказати да је $x \in [0,1)$ рационалан ако и само је $\varphi^m(x) = 0$ за неко $m \in \mathbb{N}$.
(3) Доказати да
  (а) Број којима периодични верижни запис јесте нула квадратне функције са целобројним коефицијентима.
  (а) Број којима коначно (почевши од неког n) периодични верижни запис јесте нула квадратне функције са целобројним коефицијентима.
(4) * Доказати да за сваки низ $\{b_n\}$ природних бројева низ коначних верижних разломака $[b_1, \ldots, b_n n]$ конвергира. Доказати да да за свако $x \in \mathbb{R}$ низ $\{[a_1, a_2, \ldots, a_n]\}$, $a_n = [1/\varphi^{n-1}(x)]$ конвергира ка x и да је пресликавање $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\{b_n\} \mapsto [b_1, b_2 \ldots]$ $1-1$, тј. да је верижна репрезентација реалног броја јединствена. Доказати да је пресликавање $\pi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, $\pi(\{a_n\}) = [a_1, a_2, \ldots]$ хомеоморфизам који успоставља конјугацију између φ и σ.

(Ђ) Торусни аутоморфизам

(1) Нека је A несингуларна 2×2 целобројна матрица и $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ придружени торусни ендоморфизам.

   (а) Доказати да је свака тачка са рационалним координатама коначно периодична.
   (б) Ако је A хиперболички, доказати да свака коначно периодична тачка има рационалне координате.

(2) Доказати да су сопствене вредности дводимензионог хиперболичког торусног аутоморфизма ирационални бројеви.

(3) Нека је $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ торусни аутоморфизам дефинисан матрицом $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$. Доказати да је скуп периодичних тачака густ у $\mathbb{T}^2$. Чему је једнак скуп периодичних тачака ако је A хиперболички аутоморфизам?

(4) Нека је $\alpha \notin \mathbb{Q}$ и ϕ_t кретање торуса дефинисано кретањем у равни

$$\frac{d\phi_t}{dt} = (1, \alpha), \quad \phi_0 = \mathrm{Id},$$

тј.

$$\phi_t : (x, y) \mapsto (x + t \bmod 1, y + \alpha t \bmod 1).$$

За $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ дефинишимо просторно усредњење као

$$\hat{F} := \iint_{\mathbb{T}^2} F(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1\, d\varphi_2$$

и временско усредњење у тачки $\boldsymbol{\varphi}_0$ као

$$F^*(\boldsymbol{\varphi}_0) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\phi_t(\boldsymbol{\varphi}_0))\, dt.$$

   (а) Доказати да $\hat{F} = F^*(\boldsymbol{\varphi}_0)$ за сваку непрекидну функцију $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ (својство ергодичности кретања ϕ_t).
   (б) Нека је $D \subset \mathbb{T}^2$ отворена кугла. Доказати да је

$$\lim_{T\to\infty} \frac{m\{t \in [0, T] \mid \phi_t(\boldsymbol{\varphi}_0) \in D\}}{T} = m(D).$$

   (в) Доказати да је за свако $\boldsymbol{\varphi}_0$ орбита $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varphi}_0}$ густа.
   (г) Какво је кретање ϕ_t за $\alpha \in \mathbb{Q}$?
   (д) Доказати да су стабилне и нестабилне многострукости хиперболичког торусног аутоморфизма густе у $\mathbb{T}^2$.

(5) Доказати да је број фиксних тачака хиперболичког торусног аутоморфизма једнак $|\det(A - E)|$ а број периодичих тачака периода n једнак $|\det(A^n - E)|$.

(Е) Смејлова потковица и соленоид

(1) Скицирати скупове $f^{-1}(R) \cap f(R)$ и $f^{-2}(R) \cap f^2(R)$.
(2) Доказати да је H локално максималан f-иваријантнан скуп.
(3) Доказати да је ϕ хомеоморфизам.
(4) Нека је F соленоид пресликавање. Доказати да је
   (а) $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ инјективно;
   (б) $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ бијективно.
(5) Доказати да је соленоид $\mathcal{S}$ повезан, али није путно повезан нити локално повезан.
(6) Доказати да је за свако $(\phi_0, \phi_1, \ldots) \in \Phi$ скуп $\bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(\{\phi_n\} \times D^2)$ једночлан, и да је $h(s) = (\phi_0, \phi_1, \ldots)$. Доказати да је h хомеоморфизам.
(7) Доказати да је Φ тополошка група и да је α аутоморфизам и хомеоморфизам.
(8) Наћи фиксну тачку пресликавања F и све периодичне тачке периода 2. Колико има периодичних тачака периода n?
(9) Доказати да је скуп периодичних тачака пресликавања $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ густ.

(Ж) Суспензије и попречни пресеци

(1) Доказати да је суспензија ϕ^t ток, тј. да је $\phi^0 = \mathrm{Id}$ и $\phi^{t_1+t_2} = \phi^{t_1} \circ \phi^{t_2}$.
(2) Доказати да периодичним орбитама пресликавања f одговарају периодичне орбите суспензије ϕ^t.
(3) Доказати да густим орбитама суспензије ϕ^t одговарају орбите орбите пресликавања f.

(4) * Нека су 1, s и $\alpha s \in \mathbb{R}$ линеарно независни над $\mathbb{Q}$. Доказати да је свака орбита пресликавања ϕ_α^s густа у $\mathbb{T}^2$.

(З) Хаос (осетљивост на почетне услове) и експонент Љапунова

(1) Доказати да шатор пресликавање (видети домаћи $\Gamma(1)$) има осетљиву зависност у односу на почетне услове.
(2) Доказати да шифт пресликавање $\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ има осетљиву зависност у односу на почетне услове.
(3) Доказати да логистичко пресликавање $q_4 : x \to 4x(1-x)$, $q_4 : [0,1] \to [0,1]$ има осетљиву зависност у односу на почетне услове.
(4) Наћи пример метричког простора (X, d), динамичког система $f : X \to X$ и хомеоморфизма $\varphi : X \to X$ тако да f у односу на d има осетљиву зависност у односу на почетне вредности, а у односу на метрику

$$d_\varphi(x,y) := d(\varphi(x), \varphi(y))$$

нема. Закључити да осетљива зависност у односу на почетне вредности није инваријанта тополошке конјугације.
(5) Доказати својства експонента Љапунова:
  (а) $\chi(x, \lambda v) = \chi(x, v)$ за све реалне $\lambda \neq 0$;
  (б) $\chi(x, u+v) \leq \max\{\chi(x,u), \chi(x,v)\}$;
  (в) $\chi(f(x), df(x)v) = \chi(x, v)$.
(6) Наћи експонент Љапунова за E_m.
(7) Наћи експонент Љапунова за за соленоид.

(И) Основни појмови у тополошкој динамици

(1) Доказати да су $\omega(x)$ и $\alpha(x)$ затворени и инваријантни скупови.
(2) Доказати да је $\mathcal{R}(f)$ инваријантан скуп.
(3) Доказати да је $NW(f)$ затворен и инваријантни скуп који садржи $\omega(x)$ и $\alpha(x)$ за свако x.
(4) Доказати да је $\overline{\mathcal{R}}(f) \subset NW(f)$.
(5) Доказати да је тачка x нелутајућа ако и само ако за сваку околину $U \ni x$ и свако $n_0 \in \mathbb{N}$ постоји $n \geq n_0$ за које важи $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.
(6) Доказати да су следећи услови еквивалентни.
  (а) $f : X \to X$ је минимално.
  (б) $\omega(x) = X$ за свако x.
  (в) За сваки непразан отворен скуп $U \subset X$ важи $\bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U) = X$.
  (г) $\overline{\mathcal{O}}^+(x) = X$ за свако x.
(7) Ако је f хомеоморфизам доказати да важи:

$$y \in \overline{\mathcal{O}(x)},\ z \in \overline{\mathcal{O}(y)} \ \Rightarrow\ z \in \overline{\mathcal{O}(x)}.$$

Ако је f непрекидно доказати да важи:

$$y \in \overline{\mathcal{O}^+(x)},\ z \in \overline{\mathcal{O}^+(y)} \ \Rightarrow\ z \in \overline{\mathcal{O}^+(x)}.$$

(8) Доказати да за $E_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ постоје тачке које нису рекурентне али нису ни коначно периодичне.
(9) За хиперболички торусни аутоморфизам $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ доказати да важи:
  (а) $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathbb{T}^2$ (одакле из Задатка 4. закључујемо $NW(A) = \mathbb{T}^2$);
  (б) $\mathcal{R}(A) \neq \mathbb{T}^2$.
(10) Доказати да је хомеоморфизам f минималан ако и само ако за сваки непразан отворен скуп $U \subset X$ постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да је $\bigcup_{j=-n}^{n} f^j(U) = X$.
(11) Доказати да је хомеоморфизам f компактног метричког простора X минималан ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $N = N(\varepsilon)$ такво да је за свако $x \in X$ скуп $\{x, f(x), \ldots, f^N(x)\}$ ε-густ у X.
(12) Нека су X и Y компактни метрички простори и $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ непрекидна пресликавања. Доказати да је $\overline{\mathcal{O}^+_{f\times g}(x,y)} = \overline{\mathcal{O}^+_f(x)} \times \overline{\mathcal{O}^+_g(y)}$ ако и само је $(x, g(y)), (f(x), y) \in \overline{\mathcal{O}^+_{f\times g}(x,y)}$. Нека су f и g минимални. Наћи потребне и довољне услове да $f \times g$ буде минимално.
(13) Доказати да је $f \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ минималан ако и само је тополошки транзитиван.
(14) * Наћи пример динамичког система за који важи $NW(f) \not\subset \overline{\mathcal{R}(f)}$.

(15) Ако је $f : X \to X$ хомеоморфизам, доказати да је f тополошки транзитивно ако и само ако је то f^{-1}.
(16) Нека је X метрички простор са бар једном изолованом тачком и $f : X \to X$ тополошки транзитивно. Доказати да је X коначан скуп и да је $\mathcal{O}_x^+ = X$ за свако $x \in X$.
(17) Доказати да је тополошки транзитивно пресликавање метричког простора које је и Липшицово са Липшицовом константом 1 обавезно минимално.
(18) Ако је f тополошки транзитивно пресликавање доказати да за свака два отворена скупа постоји бесконачно много $m \geq 0$ за које важи $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.
(19) Нека је X метрички простор без изолованих тачака.
а)* Нека је $f : X \to X$ пресликавање за које важи:

$$\text{за свака два } U, V \neq \emptyset \text{ отворена, постоје } m, n \in \mathbb{N}_0, \text{ тдј. } f^{-m}(U) \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset. \qquad (\heartsuit)$$

Доказати да из ($\heartsuit$) следи да за сваки произвољан отворен непразан $\mathcal{O}$ постоји бесконачно много $n \in \mathbb{N}$ таквих да је

$$f^{-n}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset.$$

б) Доказати да је $f : X \to X$ тополошки транзитивно ако и само важи ($\heartsuit$). [Упутство за смер $\Leftarrow$: за дате U и V постоји $k \geq 0$ тдј. или $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ или $U \cap f^k(V) \neq \emptyset$. У другом случају применимо тачку б) на скуп $\mathcal{O} := V \cap f^{-k}(U)$.]
в) Доказати да је пресликавање $f : X \to X$ тополошки транзитивно ако и само за свако $\varepsilon > 0$ и сваке две тачке $x, y \in X$ постоји $z \in X$ и $m, n \geq 0$ такви да је $d(f^m(z), x)) < \varepsilon$ и $d(f^n(z), y) < \varepsilon$.
(20) Доказати да је $f : X \to X$ тополошки транзитивно ако постоји тачка x за коју важи $\omega(x) = X$. Ако је X комплетан и сепарабилан, доказати да ако је f тополошки транзитивно онда постоји тачка x за коју важи $\omega(x) = X$.
(21) Ако X нема изолованих тачака и $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$, онда је $\overline{\omega(x)} = X$. Доказати. Примером показати да ово није тачно ако X има изолованих тачака.
(22) Наћи пример динамичког система за који постоји x такво да је $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$ али не постоји x за које важи $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$.
(23) Да ли је производ два динамичка система која имају густу орбиту има густу орбиту? Да ли фактор система који има густу орбиту, такође има густу орбиту?
(24) Нека је $f : X \to X$ хомеоморфизам. Ако f има неконстантни први интеграл (непрекидну функцију која је константна дуж орбита) или функцију Љапунова (непрекидну функцију која је нерастућа дуж орбита), тада f нема густу орбиту. Доказати.
(25) Нека динамички систем $f : X \to X$ има барем две орбите и нека важи један од следећа два услова:
- X нема изолованих тачака
- f је хомеоморфизам.

Доказати да ако f има привлачећу периодичну тачку, тада он нема густу орбиту.
(26) Нека је α ирационалан и $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ хомеоморфизам торуса дефинисан са $f(x, y) = (x + \alpha, x + y)$.
(а) Доказати да је сваки непразан, отворен, f-инваријантан скуп густ, тј. да је f тополошки транзитивно.
(б) Нека је орбита тачке (x_0, y_0) густа. Доказати да је за свако $y \in \mathbb{S}^1$, $\overline{\mathcal{O}^+(x_0, y)} = \mathbb{T}^2$. Доказати ако је скуп $\bigcup_{k=0}^n f^k(x_0, y_0)$ ε-густ, да је онда и $\bigcup_{k=0}^n f^k(x_0, y)$ ε-густ.
(в) Показати да је свака (напред) орбита густа, тј. да је f минимално.
(27) Допунити доказ Поенкареове теореме: доказати да је пресликавање

$$T : \Lambda_{x_0} \to \Omega, \quad T : F^n(x_0) + m \mapsto n\rho + m\},$$

где су

$$\Lambda_{x_0} := \{F^n(x_0) + m \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \pi^{-1}\left(\mathcal{O}_f(x_0)\right)$$
$$\Omega := \{n\rho + m \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \pi^{-1}(\mathcal{O}_{R_\rho}(0)),$$

монотоно.
(28) Шта можемо рећи о јединствености хомеоморфизма φ који успоставља тополошку конјугованост у Поенкареовој теореми? [Упутство: $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + \rho \mod 1$, нека су φ_1 и φ_2 два таква хомеоморфизма, $\varphi_0 := \varphi_1 - \varphi_2$, какво је пресликавање φ_0?)
(29) Нека је $f \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ и $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Доказати да $\omega(x)$ не зависи од x.
а) Ако је f тополошки транзитивно, доказати да је $\omega(x) = \mathbb{S}^1$.
б) Ако f није тополошки транзитивно, доказати да је $\omega(x)$ нигде густ скуп без изолованих тачака.
(30) Дати пример хомеоморфизма f круга који мења оријентацију таквог да је $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$ али немају све тачке исти период.
(31) Нека је $f \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ и $\rho(f) \in \mathbb{Q}$. Доказати да је $\Omega(f) = \mathrm{Per}(f)$

(32) Доказати да су шифт пресликавање, $E_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ и хиперболички торусни аутоморфизам $A : \mathbb{T}^{\to}\mathbb{T}^2$ хаотична пресликавања.
(33) Нека је X метрички простор без изолованих тачака. Доказати да је f хаотично ако и само за сваку коначну фамилију $\{U_1, \dots, U_m\}$ отворених непразних скупова постоји периодична орбита $\mathcal{O}_x^+$ која их све сече.

(J) Атрактори и репелери. Системи градијентног типа

(1) Нека је X компактан и $f : X \to X$ реверзибилан динамички систем. Доказати да за дати атрактор A дуални репелер R зависи само од A (а не и од изолатора U који учествује у дефиницији атрактора A).
(2) Нека $f, g : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Наћи све атракторе и репелере пресликавања f и g и $\mathcal{CR}(f)$ и $\mathcal{CR}(g)$.
(3) Нека је $f : [0,1] \to [0,1]$ реверзибилан динамички систем и нека је $f(0) = 0$. Доказати да је $\mathcal{CR}(f) = \mathrm{Fix}(f)$.
(4) Ако је $f : X \to X$ непрекидно и X компактан, и A атрактор за f, доказати да је $f(A) = A$.
(5) Ако је A атрактор доказати да постоји отворен скуп $U \supset A$ такав да је $\omega(x) \in A$ за свако $x \in U$. Доказати да обрнуто није тачно (тј. да скуп $\omega(x)$ не мора да буде садржан у атрактору). [Упутство: $x \mapsto x + 1/10 \sin^2(\pi x) \,(\mathrm{mod}\, 1)$ на $\mathbb{S}^1$.]
(6) Нека је M глатка затворена многострукост и $F : M \to \mathbb{R}$ глатка функција са коначно много критичних тачака. Нека је ϕ_t негативни градијентни систем придружен функцији F ($d\phi_t/dt = -\nabla F(\phi_t)$). Доказати да за свако $x \in M$, $\phi_t(x)$ тежи ка критичној тачки функције F, кад $t \to \pm\infty$.
(7) Нека је X компактан метрички простор и $f : X \to X$ реверзибилан динамички систем градијентног типа. Претпоставимо да f допушта функцију Љапунова V такву да је $V(\mathrm{Fix}(f))$ коначан скуп. Доказати да је $\mathcal{CR}(f) = \mathrm{Fix}(f)$. [Упутство: (i) Доказати да за свако $c \in \mathbb{R} \setminus V(\mathrm{Fix}(f))$ постоји $\delta > 0$ такво да важи $V(x) < c+\delta \Rightarrow V(f(F)) < c$. (ii) За $z \notin \mathrm{Fix}(f)$ изабрати N такво да $V(f^k(z)) \notin V(\mathrm{Fix}(f))$ за свако $k \geq N$. (iii) За $x = f^N(z)$, $a := V(f(x))$, $b := V(x)$, изабрати δ из тачке (i) и изабрати $\eta := \min\{\delta, (b-a)/2\}$, и ε тдј. $d(x_1, x_2) < \varepsilon \Rightarrow |V(x_1) - V(x_2)| < \eta$. (iv) Доказати да не постоји ε-псеудоорбита која почиње у x. (v) Доказати да $x \notin \mathcal{CR}(f) \Rightarrow z \notin \mathcal{CR}(f)$.]
(8) Динамички систем је дефинисан диференцијалном једначином ($f(x,y) = \phi^1(x,y)$):

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y' &= x + y(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Ако је $X = \{x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\}$, доказати да $f : X \to X$. Наћи атракторе и репелере система f.

(K) Тополошка ентропија

(1) Доказати да све динамичке метрике d_n дефинишу исту топологију као и метрика d.
(2) Доказати да је $\mathrm{cov}(n, 2\varepsilon) \leq \mathrm{span}(n, \varepsilon) \leq \mathrm{sep}(n, \varepsilon) \leq \mathrm{cov}(n, \varepsilon)$.
(3) Ако метрике d и d' индукују исту топологију на X, доказати да се тополошке ентропије дефинисане метрикама d и d' поклапају.
(4) Доказати следећа својства тополошке ентропије:
   (а) $h(f^m) = m \cdot h(f)$, за $m \in \mathbb{N}$;
   (б) ако је f реверзибилно, онда је $h(f^{-1}) = h(f)$, па је $h(f^m) = |m| \cdot h(f)$, за $m \in \mathbb{Z}$;
   (в) ако су A_j, $j = 1, \dots, k$ затворени и инваријантни скупови и $X = \bigcup_j A_j$, тада је

$$h(f) = \max_j h(f|_{A_j}).$$

(5) Доказати следећа својства тополошке ентропије:
   (а) $h(f \times g) = h(f) + h(g)$;
   (б) ако је g фактор од f, онда је $h(f) \geq h(g)$.
(6) Доказати да су E_m, за $|m| > 1$, једнострани и двострани шифт, хиперболички торусни аутоморфизам, Смејлова потковица и соленоид експанзивна пресликавања.

(7) Доказати да је тополошка ентропија шифт пресликавања σ на простору једностраних или двостраних низова (Σ_m^+ или Σ_m) од m симбола једнака $\log m$. Доказати да је $h(E_m) = \log m$. Колика је тополошка ентропија Смејловог потковичастог пресликавања?

(8) Доказати да је тополошка ентропија соленоида једнака $\log 2$.

(9) Нека је $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Риманова сфера. Дата су пресликавања $f, g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ са

$$f(z) = z^2,\ f(\infty) = \infty, \quad g(z) = \frac{z^2}{2|z|},\ g(0) = 0,\ g(\infty) = \infty.$$

Израчунати $\deg(f)$, $\deg(g)$, $P_n(f)$ и $P_n(g)$, где је са $P_n(f)$ означена кардиналтност скупа периодичних тачака периода n.

(10) Нека су f и g пресликавања из претходног задатка. Доказати да је $h(f) = \log 2$ а $h(g) = 0$.

(11) Нека је $f = \frac{P}{Q}$ рационално пресликавање Риманове сфере, тј. нека су P и Q полиноми који немају заједнички фактор. Доказати да је $h(f) \geq \max \log\{\deg(P), \deg(Q)\}$.

(12) Нека је f пресликавање Риманове сфере, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Доказати да је $h(f) = 0$.

(Л) Хиперболички скупови и сенчење

(1) Доказати Тврђење 1 са предавања.

(2) Доказати Тврђење 2 са предавања.

(3) Конструисати дифеоморфизам круга који задовољава прва три својства из дефиниције хиперболичности ($\Lambda = \mathbb{S}^1$) али не и четврто.

(4) Доказати да својство хиперболичност скупа Λ не зависи од избора Риманове метрике.

(5) Ако је x фиксна тачка дифеоморфизма f доказати да је скуп $\{x\}$ хиперболички ако и само ако је матрица извода df_x хиперболичка (тј. таква да је $|\lambda| \neq 1$ за сваку сопствену вредност λ). Шта могу бити константе C и λ за скуп $\{x\}$. Наћи пример пресликавања таквог да df_x има сопствене вредности $\mu \in (0,1)$ и $1/\mu$ али да је $\lambda \neq \mu$.

(6) Шта можемо рећи о хиперболичности периодичне орбите периода k?

(7) Ако су Λ_1 и Λ_2 хиперболички скупови за пресликавања f_1 и f_2 ($f_i : U_i \to M_i$, $i = 1, 2$), доказати да је $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ хиперболички за $f_1 \times f_2$.

(8) Доказати да је Смејлова потковица хиперболички скуп.

(9) Нека је $M \xrightarrow{\pi} N$ раслојење, $U \subset M$ отворен и $\lambda \subset U$ хиперболички скуп за пресликавање $f : U \to M$ (дифеоморфизам на $f(U)$). Нека је $g : N \to N$ фактор од f. Доказати да је $\pi(\Lambda)$ хиперболички скуп за g.

(10) Доказати тачке 1-4. у Примеру 4.

(11) Доказати да ако је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ C^1-близу пресликавању E_m, онда се свака бесконачна ε-псеудоорбита $\{x_n\}$ пресликавања f може осенчити правом орбитом пресликавања f. Ова орбита непрекидно зависи од $\{x_n\}$ у Тихоновљевој топологији.

(12) Нека је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ C^1 близу пресликавању E_m. Посматрајмо орбиту тачке x, $\{f^n(x)\}$ као ε-псеудоорбиту. Нека је y тачка за коју орбита $\{E_m^n(y)\}$ сенчи $\{f^n(x)\}$. Тада је пресликавање $\phi(x) = y$ хомеоморфизам који успоставља конјугацију између f и E_m. Доказати.

(13) Доказати тврђење са почетка Примера 5:

Нека је матрица $A \in \mathrm{M}_2$ хиперболичка и $\det A = \pm 1$. Тада за сваки ограничени низ $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^2$ постоји јединствени ограничени низ $\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^2$ за који важи

$$w_k - Aw_{k-1} = u_k, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Такође постоји константа C која зависи само од матрице A таква да је

$$\sup_k \|w_k\| \leq C \sup_k \|u_k\|.$$

[Упутство: једначина

$$w_k - Aw_k = u_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

еквивалентна је једначини

$$Bw_k - DBw_{k-1} = Bu_k,$$

где је D дијагонална матрица а B таква да је $A = B^{-1}DB$. Означимо

$$\begin{pmatrix} \alpha_k^+ \\ \alpha_k^- \end{pmatrix} = Bw_k, \quad \begin{pmatrix} \beta_k^+ \\ \beta_k^- \end{pmatrix} = Bu_k.$$

Нека су $\lambda_\pm$ сопствене вредности матрице A и то нека је $|\lambda_+| > 1$. Једначине

$$\alpha_k^+ - \lambda_+ \alpha_{k-1}^+ = \beta_k^+, \quad \alpha_k^- - \lambda_- \alpha_{k-1}^- = \beta_k^-$$

имају експлицитна решења по $\alpha_k^\pm$ (у облику бесконачног реда). Јединственост је могуће доказати индукцијом.]

(14) Доказати да је орбита која остварује сенчење у Примеру 5 јединствена.
(15) Ако дифеоморфизам f има хиперболичку фиксну тачку, доказати да свако g које је C^1-близу пресликавању f, такође има фиксну тачку.
(16) Интерпретирати Теорему 8 за $X = \mathbb{Z}_m$ и $f(z) = z + 1 \bmod m$.
(17) Доказати да је рестрикција $f|_\Lambda$ експанзивна.
(18) Да ли шатор пресликавање има својство сенчења?
(19) Доказати да изометрија многострукости нема својство сенчења.
(20) Доказати да се сваки минимални хиперболички скуп састоји од тачно једне периодичне орбите.

(Љ) Инваријантни конуси и стабилност

(1) Доказати да је соленоид $\mathcal{S}$ хиперболички скуп пресликавања F.
(2) Нека је Λ хиперболички скуп пресликавања f. Доказати да постоји отворен скуп $\mathcal{O} \supset \Lambda$ и $\varepsilon > 0$ такви да за свако g за које важи $\mathrm{dist}_1(f, g) < \varepsilon$, скуп $\Lambda_g := \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} g^n(\mathcal{O})$ је хиперболички скуп пресликавања g.
(3) Доказати да је тополошка ентропија Аносовљевог дифеоморфизма позитивна.
(4) Нека је Λ хиперболички скуп за f. Ако је $\dim E^u(x) > 0$ за свако $x \in \Lambda$, тада f има својство осетљиве зависности од почетних вредности. Доказати.
(5) Доказати Тврђење 9 из 4. лекције.
(6) Нека је $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ линеарни хиперболички систем (тј. матрица пресликавања је хиперболичка, или еквивалентно, читаво $M = \mathbb{R}^m$ је хиперболички скуп за L). Доказати да постоји $\delta > 0$ такво да је линеарно пресликавање L_1, за које важи $\|L - L_1\| < \delta$, такође хиперболичко, и да је тада разлагање $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ једнако за пресликавања L и L_1.

(М) Стабилна и нестабилна многострукост

(1) Нека је пресликавање $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ инвертибилно линеарно пресликавање и $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ Липшицово. Ако је $\mathrm{Lip}(g) < \mathrm{co}(L)$, доказати да је је $L + g$ би-Липшицово и да је

$$\mathrm{Lip}((L+g)^{-1}) \leq \frac{1}{\mathrm{co}(L) - \mathrm{Lip}(g)}.$$

(Липшицова теорема о инверзној функцији.)

(2) Доказати да постоји метрика $\|\cdot\|$ из исказа Тврђења 2.
(3) Доказати да је $\Sigma := \{\xi \in C^0(E^u, E^s) \mid \xi(0) = 0, \|\xi\|^* < \infty\}$ са нормом

$$\|\xi\|^* := \sup \frac{\|\xi(v)\|_s}{\|v\|_u}$$

(видети и Тврђење 7 из 4. лекције) Банахов.

(4) Нека је $L : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^m$ линеарни хиперболички динамички систем, $E = E^s \oplus E^u$ и $\|\cdot\|$ норма из Задатка (М4). Како разлагање $E = E^s \oplus E^u$ не зависи од тачке $x \in \mathbb{R}^m$, означимо са $K_1^s := K_1^s(x)$ стабилни конус величине 1, тј. $K_1^s := \{v \in \mathbb{R}^m \mid \|v_u\| \leq \|v_s\|\}$. Нека је $\tau(L) := \max\{\|L|_{E^s}\|_\infty, \|L^{-1}|_{E^u}\|_\infty\} < 1$ и $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ Липшицово са $\mathrm{Lip}(g) < 1 - \tau(L)$, $g(0) = 0$. Ако је $f = g + L$, тада важи

$$\begin{aligned} W^s(0, f) &= \{v \in \mathbb{R}^m \mid \exists a \geq 0,\ \|f^n(v)\| \leq a,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^m \mid f^n(v) \in K_1^s,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^m \mid \|f^n(v)\| \leq (\tau(L) + \mathrm{Lip}(g))^n \|v\|,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$

Доказати.

(5) Доказати да из претходног задатка следи да се може изабрати довољно мало δ у доказу Тврђења 2 из 5. лекције, такво да је $\mathrm{Graph}(\xi) \subseteq W^u(0, f)$.
(6) Доказати да $\mathrm{Lip}(g_r) \to 0$, кад $r \to 0$, где је пресликвање g_r дефинисано у доказу Теореме 1 у 5. лекцији.

(7) Шта су скупови Λ^s_δ, Λ^u_δ, $W^u_\varepsilon(x^s)$, $W^u_\varepsilon(x^u)$, $W^s(0)$, $W^u(0)$ у случају линеарног хиперболичког динамичког система, $\Lambda = \{0\}$?
(8) Доказати Тврђење 7 са предавања.
(9) Доказати Последицу 8 са предавања.

(Н) Ламбда лема и разни задаци

(1) Доказати Лему 1 један из Лекције 6.
(2) Доказати да је $f|_\Lambda$ (видети Дефиницију 3 из 6. лекције) конјуговано шифту на простору Σ_k где је k број компоненти повезаности скупа $f(R) \cap R$.
(3) Доказати да су фиксне тачке Морсове градијентног система хиперболичке. [Морсова фукција је она чији је Хесијан (матрица другог извода) недегенерисан у критичним тачкама ($\nabla F = 0$). Упутство: Искористити Морсову лему: у околини критичне тачке p постоје координате у којима Морсова фукнција има запис $F(x) = F(p) + x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_n^2$, где је k број позивитних сопствених вредности Хесијана; или на неки други начин.]
(4) Нека је M симплектичка многострукост и $f : M \to M$ симплектоморфизам (дифеоморфизам који чува симплектичку форму). Нека је Λ хиперболички скуп пресликавања f. Доказати да је за свако $x \in \Lambda$, $\dim E^s(x) = \dim E^u(x)$, тј. да су простори $E^s(x)$ и $E^u(x)$ Лагранжеви, а многострукости $W^s(x)$ и $W^u(x)$ Лагранжеве подмногострукости.
(5) Нека је $x \in U$ хиперболичка фиксна тачка дифеоморфизма $f : U \to M$. Доказати да постоји околина V тачке x таква да ако $f^n(y) \in V$ за свако $n \in \mathbb{Z}$, мора бити $x = y$. [Упутство: видети Хартмен-Гробманову теорему (нпр. на:
`https://www.merry.io/dynamical-systems/32-the-hartman-grobman-theorem/`) или
`https://www.merry.io/dynamical-systems/33-stable-and-unstable-manifolds/`.]
(6) Нека је $x \in U$ хиперболичка фиксна тачка дифеоморфизма $f : U \to M$. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји околина V_n тачке x таква да важи: ако је $y \in V_n \setminus \{x\}$ периодична тачка периода k, тада је $k > n$.

(Њ) Локално максимални хиперболички скупови. Аносовљеви дифеоморфизми

(1) Доказати да је, ако је Λ локално максимални хиперболички скуп за f, важи $\overline{\mathrm{Per}(f|_\Lambda)} = \mathrm{NW}(f|_\Lambda)$.
(2) Доказати Лему 2 из 7. лекције.
(3) Доказати да је соленоид $\mathcal{S}$ локално максималан хиперполички скуп.
(4) Доказати да је Смејлова потковица H локално максималан хиперполички скуп.
(5) Доказати да је хомоклиничка тачка нелутајућа али да није рекурентна.
(6) Доказати да су хиперболички торусни аутоморфизми (за $n = 2$), шифт пресликавање (и на простору Σ_m и на Σ_m^+), пресликвање E_m, соленоид и Смејлова потковица тополошко миксирање.
(7) Доказати да је фактор тополошког миксирања такође тополошко миксирање.
(8) Дати пример тополошки транзитивног пресликавања које није тополошко миксирање.
(9) Доказати један корак у доказу Теореме 2 у Лекцији 8: ако је многострукост M повезана и компактна и тачке $x_1, \ldots, x_N$ чине ε мрежу, тада за свако x_i и x_j постоје $x_{k1}, \ldots, x_{k_n}$, $n \leq N$, такве да је $x_i = x_{k_1}$, $x_j = x_{k_n}$ и $d(x_{k_l}, x_{k_{l+1}}) < \varepsilon/2$.
(10) Доказати Лему 4 из 8. лекције.

(О) Аксиома А и структурална стабилност

(1) Наћи пример дифеоморфизма за који важи $\mathrm{NW}(f|_{\mathrm{NW}(f)}) \neq \mathrm{NW}(f)$ и $\mathrm{NW}(f)$ је хиперболички скуп.
(2) Доказати да је релација $\sim$ дефинисана у Лекцији 9 релација еквиваленције.
(3) Доказати Последицу 5 из Лекције 9.