7. Локално максимални хиперболички скупови

Дефиниција 1. Хиперболички скуп Λ пресликавања $f : U \to M$ се зове *локално максималан* или *базичан* ако постоји отворен скуп V, $\Lambda \subset V \subset U$ такав да је

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(V).$$

$\diamond$

Примери локално максималних хиперболичких скупова су потковица и соленоид.

Природно је питање да ли је хиперболички скуп локално максималан, пошто је сваки његов затворен инваријантан подскуп такође хиперболички.

Главно тврђење у овом поглављу је везано за једну згодну карактеризацију локално максималних хиперболичких скупова. Пре него што формулишемо и докажемо то тврђење, извешћемо неке помоћне кораке.

Пре свега подсетимо се ознака. За $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ означавамо са

$$W^s_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$$
$$W^u_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$$

локалну стабилну и нестабилну многострукост.

Нека је $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^m$ и $B_{\mathbb{R}^k}(0, r)$ отворена кугла у $\mathbb{R}^k$ са центром у 0 и полупречника r.

Лема 2. *За свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да ако су $\phi : B_{\mathbb{R}^k}(0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^l$ и $\psi : B_{\mathbb{R}^l}(0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^k$ диференцијабилна пресликавања за која важи*

$$\|\phi(x)\|, \|d_x\phi\|, \|\psi(y)\|, \|d\psi_y\| < \delta$$

за све $x \in B_{\mathbb{R}^k}(0, \varepsilon)$, $y \in B_{\mathbb{R}^l}(0, \varepsilon)$, тада је пресек $\mathrm{Graph}(\phi) \cap \mathrm{Graph}(\psi)$ трансверзалан и састоји се од само једне тачке, која зависи непрекидно од ϕ и ψ, у C^1 топологији.

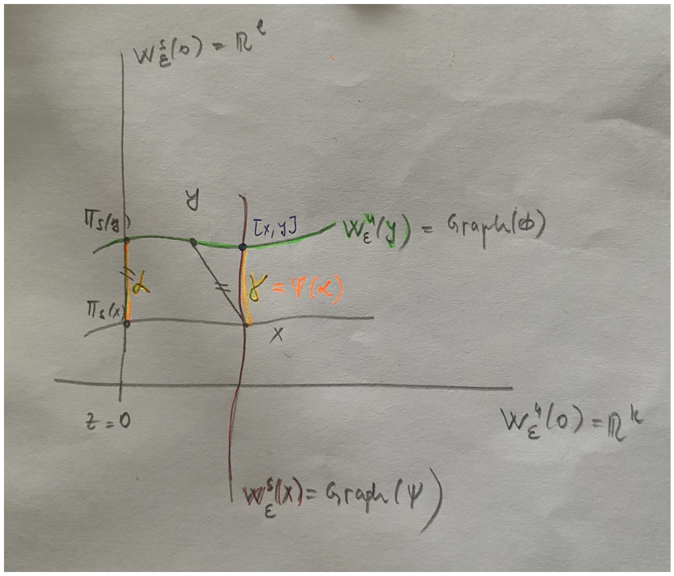
Доказ. Домаћи (Њ2). $\square$

Тврђење 3. *Нека је Λ хиперболички скуп пресликавања f. За довољно мало $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да ако је $x, y \in \Lambda$ и $d(x, y) < \delta$, тада је пресек $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ трансверзалан и састоји се од тачно једне тачке, коју означавамо са $[x, y]$. Постоји константа $c = c(\delta)$ таква да за свако $x, y \in \Lambda$ важи*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d^s(x, [x, y]) \le c \cdot d(x, y),\ d^u(y, [x, y]) \le c \cdot d(x, y),$$

где су d^s и d^u растојања дуж $W^s_\varepsilon(x)$ и $W^u_\varepsilon(y)$.

Доказ. Нека је z произвољна тачка из Λ. Знамо да су скупови $W^s_\varepsilon(z)$ и $W^u_\varepsilon(z)$ уложене глатке многострукости чији су тангентни простори $E^s(z)$ и $E^u(z)$, дакле оне се секу трансверзално у z. Помоћу експоненцијалног пресликавања можемо изабрати локалне координате у којима је тачка z координатни почетак, $W^u_\varepsilon(z) = \mathbb{R}^k$, $W^s_\varepsilon(z) = \mathbb{R}^l$. Из Леме 2 сада следи да постоји



Слика 1: Разна растојања

околина U_z тачке z таква да за свако $x, y \in U_z$ важи да је $W^s(x) \cap W^u(y)$ трансверзалан и једночлан. За свако $z \in \Lambda$ изаберимо δ такво да је $B(z,\delta) \subset U_z$. Из компактности скупа Λ следи да можемо изабрати универзално δ за све z. Непрекидна зависност тачке $[x,y]$ од x и y такође следи из Леме 2. Остало је још да докажемо део са константом c. Нека је γ крива кроз $W^s(x)$ која спаја x и $[x,y]$. Тада је

$$d^s(x,[x,y]) \leq \int_0^1 \|\gamma'(t)\|dt = \int_0^1 \|d\psi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\|dt \leq \delta \int_0^1 \|\alpha'(t)\|dt,$$

где је $\alpha(t)$ крива у $W^s(0)$ (посматрамо координате као малопре) која спаја $\pi_s(x)$ и $\pi_s(y)$ (видети Слику 1). Ако узмемо инфимум по свим таквим кривама α закључујемо:

$$d^s(x,[x,y]) \leq \delta \cdot d_{\mathbb{R}^l}(\pi_s(x), \pi_s(y)) \leq \delta \cdot d(x,y).$$

Поново из комплактности скупа Λ закључујемо да можемо да пронађемо универзалну константну $c(\delta)$ (које ће завити и од Римановe метрике на M и поменутих координата) са траженим својством. $\square$

Дефиниција 4. Хиперболички скуп Λ има *структуру локалног производа* (СЛП) ако постоје $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такви да важи:

(i) за свако $x, y \in \Lambda$, пресек $W^s_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(x)$ је или празан или једночлан;

(ii) за свако $x, y \in \Lambda$ за које важи $d(x,y) < \delta$, пресек $W^s_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y)$ је трансверзалан и састоји се од једне тачке коју означавамо са $[x,y]$.

$\diamond$

Напомена 5. Ако Λ има СЛП тада за свако $z \in \Lambda$ постоји околина U_z таква да је

$$U_z \cap \Lambda = \{[x,y] \mid x \in W^u_\varepsilon(z),\ y \in W^s_\varepsilon(z)\}.$$

Теорема 6. *Хиперболички скуп је локално максималан ако и само има СЛП.*

Доказ. $\Rightarrow$: Нека је Λ локално максималан, и нека су ε и δ као у Тврђењу 3, с тим да је ε такво да је

$$\Lambda_\varepsilon := \{y \in M \mid d(y, \Lambda) < \varepsilon\} \subset V$$

и задовољава услов из дефиниције локалне максималности. Нека су $x, y \in \Lambda$ на растојању мањем од δ. Из Тврђења 3 следи да постоји јединствено $[x, y]$ које је удаљено од x за највише ε, па из тачке 4. у Теореми 5 из Лекције 5 следи да (пуна) орбита тачке $[x, y]$ остаје у Λ_ε. Пошто је Λ максималан, имамо да је $[x, y] \in \Lambda$.

$\Leftarrow$: Увек је $\Lambda \subset \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(V)$. Претпоставимо да Λ има СЛП. Нека су ε, δ и c као у Тврђењу 3. Хоћемо да покажемо да ако је орбита неке тачке p цела у некој околини V скупа Λ, да тада $p \in \Lambda$. За доказ овога потребна нам је следећа лема.

Лема 7. *Нека је Λ хиперболички скуп са СЛП. Тада постоје δ_1 и δ_2 такви да важи*

$$x_0 \in \Lambda,\ y \in W^u_{\delta_1}(x_0),\ d(f^n(y), \Lambda) < \delta_2,\ n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad y \in \Lambda.$$

Крај доказа Теореме 6. Претпоставимо да је ε довољно мало тако да су испуњени услови Тврђења 8 из Лекције 4. Нека је орбита $\mathcal{O}(y)$ тачке p цела у околини $\Lambda_{\varepsilon/2}$ скупа Λ. Из Тврђења 8 и Тврђења 3 из Лекције 4 следи да је скуп $\Lambda \cup \mathcal{O}(p)$ такође хиперболички па на њега можемо да применимо Тврђење 3 из ове лекције (ако треба, смањићемо ε додатно). Нека је $x_0 \in \Lambda$ такво да је $d(x_0, p) < \delta$ из Тврђења 3. Тада је

$$y := [p, x_0] \in W^s_{\varepsilon/2}(y) \ \Rightarrow \ f^n(y) \in W^s_{\varepsilon/2}(f^n(p)),$$

па је

$$d(f^n(y), \Lambda) \leq d(f^n(y), f^n(p)) + d(f^n(p), \Lambda) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\square$

Доказ Леме 7. Нека је

$$K := \sup \|df_x\|$$

на некој околини скупа Λ. Нека су ε, δ и c из дефиниције СЛП и Тврђења 3. Изаберимо δ_1 и δ_2 такве да важи

1. $\delta_1 \leq \min\{1/(cK), 1/2, \varepsilon/2\}$
2. $\delta_2 \leq \delta_1/(cK)$
3. $d(x, y) < \delta_2 \Rightarrow W^s_{\delta_1}(x) \cap W^u_{\delta_1}(y) \neq \emptyset$
4. $d(x, y) < \delta_2 \Rightarrow W^s_{2\delta_1}(x) \cap W^u_{\delta_1}(y)$ је једночлан.

Нека је $x_0 \in \Lambda$, $y \in W^u_{\delta_1}(x_0)$ и $d(f^n(y), \Lambda) < \delta_2$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Завршићемо доказ Леме ако покажемо да је за неко n:

$$a_n := \min_{z \in \Lambda \cap W^u_\varepsilon(f^n(x_0))} d^u(f^n(y), z) = 0. \tag{1}$$

Заиста, одавде ће следити да $f^n(y) \in \Lambda$, па је и $y \in \Lambda$.

Докажимо пре свега да је $a_n < \delta_1$ за свако n, индукцијом по n. Пошто $y \in W^u_{\delta_1}(x_0) \subset W^u_\varepsilon(x_0)$, то је $a_0 < \delta_1$. Нека је $a_n < \delta_1$. Изаберимо $z_n \in \Lambda$ такво да је $d(f^n(y), z_n) < \delta_2$. Означимо са

$$p_n := [z_n, f^n(y)]$$

(ово има смисла због Тврђења 3). Из неједнакости троугла и услова $y \in W^u_{\delta_1}(x_0)$ следи да је

$$W^s_{\delta_1}(f^n(y)) \subseteq W^s_{2\delta_1}(f^n(x_0)).$$

Из начина на који смо бирали δ_2 (тачка 4.) следи да је

$$\{p_n\} = \{[z_n, f^n(y)]\} = W^s_{\delta_1}(z_n) \cap W^u_{\delta_1}(f^n(y)) = W^s_{\delta_1}(z_n) \cap W^u_{2\delta_1}(f^n(x_0)) \subseteq \Lambda.$$

Последња инклузија важи због СЛП. Одавде имамо $p_n \in \Lambda$ па је

$$a_n \leq d^u(f^n(y), p_n) < c\,\delta_2 \leq \delta_1/K,$$

и одатле

$$a_{n+1} \leq K a_n < \delta_1.$$

С друге стране, из тачке 4. Теореми 5 из Лекције 5 следи да за довољно мало δ_1 постоји $\mu > 1$ такво да важи

$$a_n < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \geq \mu\, a_n,$$

па мора бити $a_n = 0$ за свако n. $\square$