# 6. Ламдба лема и трансверзалне хомоклиничне тачке

## 1 Ламбда лема

Нека је $\mathbb{R}^m = E^u \oplus E^s$ ($E^u = \mathbb{R}^k$, $E^s = \mathbb{R}^{m-k}$ за неко $k \in \{0, \ldots, m\}$). Подсетимо се ознака за (редом) стабилни и нестабилни конус, и локалну стабилну и нестабилну многострукост:

$$\begin{aligned}
K_\delta^s &:= \{v \in \mathbb{R}^m \mid \|v_u\| \le \delta \|v_s\|\} \\
K_\delta^u &:= \{v \in \mathbb{R}^m \mid \|v_s\| \le \delta \|v_u\|\} \\
W_\varepsilon^s(x) &:= \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \, \forall n \in \mathbb{N}_0\} \\
W_\varepsilon^u(x) &:= \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon, \, \forall n \in \mathbb{N}_0\}.
\end{aligned}$$

За $V = \mathbb{R}^j \cong \mathbb{R}^j \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$, са $B_V(x, r)$ означавамо лопту у $V$ са центром у $x$ полупречика $r$.

**Лема 1.** *Нека је $\lambda \in (0, 1)$, и $\varepsilon, \delta$ довољно мали. Нека су $f : B_{E^u}(0, \varepsilon) \times B_{E^s}(0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ и $\phi : B_{E^u}(0, \varepsilon) \to B_{E^s}(0, \varepsilon)$ пресликавања класе $C^1$ за која важи:*

1. *$0$ је хиперболичка фиксна тачка пресликавања $f$;*
2. *$W_\varepsilon^u(0) = B_{E^u}(0, \varepsilon) \times \{0\}$ и $W_\varepsilon^s(0) = \{0\} \times B_{E^s}(0, \varepsilon)$;*
3. *$\|df_x(v)\| \ge \lambda^{-1}\|v\|$ за свако $v \in K_\delta^u$ кадгод $x, f(x) \in B_{E^u}(0, \varepsilon) \times B_{E^s}(0, \varepsilon)$;*
4. *$\|df_x(v)\| \le \lambda\|v\|$ за свако $v \in K_\delta^s$ кадгод $x, f(x) \in B_{E^u}(0, \varepsilon) \times B_{E^s}(0, \varepsilon)$;*
5. *$df_x(K_\delta^u) \subset K_\delta^u$ кадгод $x, f(x) \in B_{E^u}(0, \varepsilon) \times B_{E^s}(0, \varepsilon)$;*
6. *$df_x^{-1}(K_\delta^s) \subset K_\delta^s$ кадгод $x, f^{-1}(x) \in B_{E^u}(0, \varepsilon) \times B_{E^s}(0, \varepsilon)$;*
7. *$T_{(y,\phi(y))}\mathrm{Graph}(\phi) \subset K_\delta^u$, за свако $y \in B_{E^u}(0, \varepsilon)$.*

*Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји скуп $D_n \subset B_{E^u}(0, \varepsilon)$ дифеоморфан кугли $B_{E^u}(0, \varepsilon)$ такав да за скуп*

$$I_n := f^n(\mathrm{Graph}(\phi|_{D_n}))$$

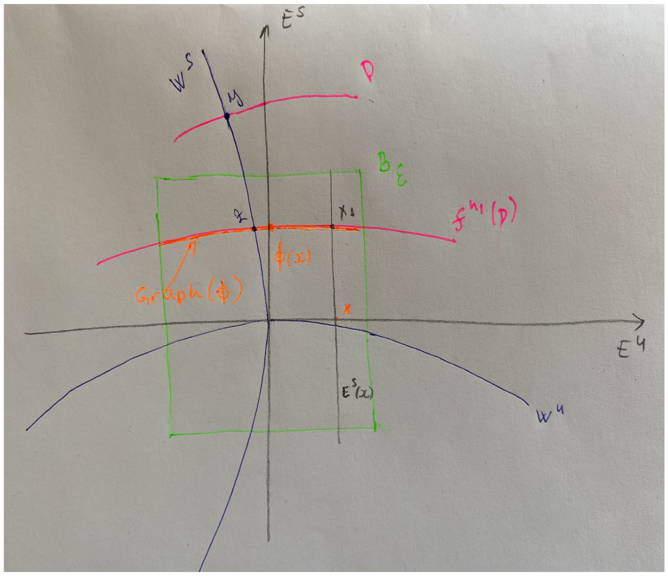
*важи $\pi_u(I_n) \supset B_{E^u}(0, \varepsilon/2)$ и $T_x I_n \subset K^u_{\delta\lambda^{2n}}$ за свако $x \in I_n$.*

**Доказ.** Домаћи (H1). □

Претходна лема нам каже да простори тангентни на слику (при пресликавању $f^n$) графика пресликавања $\phi$ експоненцијално (по $n$) теже ка нестабилном простору $E^u$.

Следећа теорема, позната као „Ламба лема"или Лема о нагињању, говори нам да се сваки диск који се трансверзално сече са стабилном многострукошћу (хиперболичке фиксне тачке пресликавања $f$), приближава нестабилном, при итерацијама пресликавања $f$.

Подсетимо се да се две подмногострукости $N, L \subset M$ секу трансверзално ако је, за свако $x \in N \cap L$, $T_x M = T_x N \oplus T_x L$.




Слика 1: Пресликавање $\phi$

**Теорема 2. (Ламба лема.)** *Нека је $x$ хиперболичка фиксна тачка дифеоморфизма $f : U \to M$, $\dim W^u(x) = k$, $\dim W^s(x) = l$. Нека је $y \in W^s(x)$ и нека је $D \ni y$ $C^1$-подмногострукост димензије $k$ која се сече са $W^s(x)$ трансверзално у тачки $y$.*

*Тада за свако $R > 0$ и $\beta > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ и, за свако $n \geq n_0$, подскуп $\tilde{D} = \tilde{D}(R, \beta, n)$ дифеоморфан отвореном $k$-диску, такав да је $y \in \tilde{D} \subset D$ и да је $C^1$-растојање између $f^n(\tilde{D})$ и $B_{W^u(x)}(0, R)$ мање од $\beta$.*

**Идеја доказа.** Претпоставимо да је $M = \mathbb{R}^m$, $x = 0$. Доказаћемо да постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ и скуп $D_1 \subset f^{n_1}(D)$ који ће бити график пресликавања $\phi$ из Леме 1. Пошто је 0 хиперболичка фиксна тачка, за свако $\delta > 0$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да се $E^s = E^s(0)$ и $E^u = E^u(0)$ могу продужити на околину $B_\varepsilon = B_{E^u}(0, \varepsilon) \times B_{E^s}(0, \varepsilon)$ тачке 0 и да се константа хиперболичности промени за највише $\delta$ (Тврђење 8 из 4. лекције). Пошто $f^n(y) \to 0$, постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да $z := f^{n_1}(y) \in B_\varepsilon$. Како се $D$ и $W^s(0)$ секу трансверзално, и $df_y^{n_1}$ је изоморфизам, то се и $f^{n_1}(D)$ и $W^s(0)$ секу трансверзално. Ако је потребно, можемо да смањимо $\varepsilon$ тако да се $df_y^{n_1}(T_y D)$ и $E^s(x)$ секу трансверзално за свако $x \in B_\varepsilon$. Дефинишимо пресликавање $\phi : B_{E^u}(0, \varepsilon) \to B_{E^s}(0, \varepsilon)$ на следећи начин:

$$E^u \ni x \mapsto x_1 := E^s(x) \cap f^{n_1}(D) \mapsto E^u(x_1) \cap E^s =: \phi(x)$$

(видети Слику 1). Није тешко видети да је $\mathrm{Graph}(\phi) = f^{n_1}(D) \cap B_\varepsilon$. Може се проверити да овакво $\phi$ задовољава услове Леме 1 и да се за $\tilde{D}$ може узети $f^{-n}(I_n)$ (ознаке из Леме 1) за погодно изабрано $n$, овде то нећемо радити. $\square$

## 2 Потковица и трансверзалне хомоклиничне тачке

Даћемо пример хиперболичког скупа који је уопштење Смејловог потковичастог пресликавања.

Нека је $\mathbb{R}^m = E^u \oplus E^s$ ($E^u = \mathbb{R}^l$, $E^s = \mathbb{R}^{m-l}$). За $z = (x, y) \in E^u \oplus E^s$ означимо са

$$\begin{aligned}
&R^u := \{x \in E^u \mid \|x\| \leq 1\}, \quad R^s := \{x \in E^s \mid \|x\| \leq 1\}, \quad R := R^u \times R^s \\
&F^s(z) := \{x\} \times R^s, \quad F^u(z) := R^u \times \{y\}.
\end{aligned}$$

Скупове $F^s$ и $F^u$ зовемо *стабилним и нестабилним фибрама.*

**Дефиниција 3.** Нека је $f : R \to \mathbb{R}^m$ пресликавање класе $C^1$. Кажемо да $f$ *има потковицу* ако постоје $\lambda, \alpha \in (0,1)$ такви да важи

1. $f$ је 1-1;
2. $f(R) \cap R$ има најмање две компоненте повезаности $\Delta_0, \ldots, \Delta_{k-1}$;
3. ако је $z \in R$ и $f(z) \in \Delta_j$, тада су скупови

   $$G_j^u(z) := f(F^u(z)) \cap \Delta_j, \quad G_j^s := f^{-1}(F^s(f(z)) \cap \Delta_j)$$

   су повезани и рестрикције пројекција $\pi_u : R \to R^u$ и $\pi_s : R \to R^s$ на $G_j^u(z)$ и $G_j^s(z)$ редом су 1-1 и на;
4. ако су $z, f(z) \in R$ тада извод $df_z$ чува нестабилни конус $K_\alpha^u$ и $\lambda \|df_z v\| \geq \|v\|$ за свако $v \in K_\alpha^u$, док $df_{f(z)}^{-1}$ чува стабилни конус $K_\alpha^s$ и $\lambda \|df_{f(z)}^{-1} v\| \geq \|v\|$ за свако $v \in K_\alpha^s$.

Скуп

$$\Lambda := \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(R)$$

се зове *потковица.* $\diamond$

**Теорема 4.** *Потковица $\Lambda$ је хиперболички скуп пресликавања $f$. Ако $f(R) \cap R$ има $k$ компонената повезаности, онда је $f|_\Lambda$ тополошки конјугована шифту на простору двостраних низова елемената из алфабета $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.*

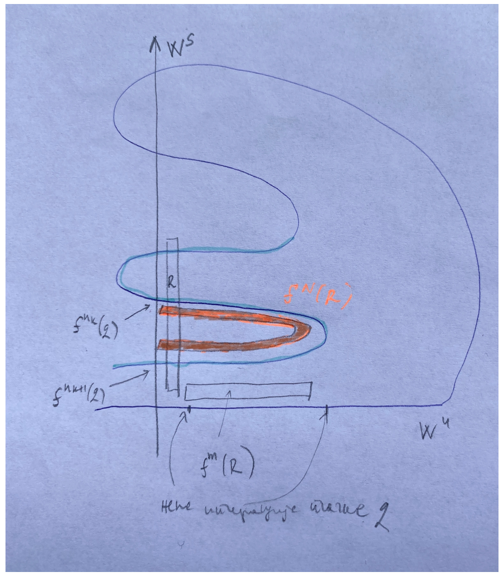
**Доказ.** Из Тврђења 3 из 4. лекције следи да је $\Lambda$ хиперболички скуп. Конјугација са шифтом је Домаћи (Н2). $\square$

**Последица 5.** *Ако дифеоморфизам $f$ има потковицу, тада је његова тополошка ентропија строго позитивна.* $\square$

**Дефиниција 6.** Нека је $p$ хиперболичка периодична тачка дифеоморфизма $f : U \to M$. Тачка $q \in U$ се назива *трансверзална хомоклинична* за тачку $p$ ако је $q \neq p$, $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$ и многострукости $W^u(p)$ и $W^s(p)$ се секу трансверзално у $q$. $\diamond$

Трансверзалне хомокличне тачке повлаче постојање потковице, о томе говори следећа теорема.

**Теорема 7.** *Нека је $p$ хиперболичка фиксна тачка глатког дифеоморфизма $f : U \to M$ која има трансверзалну хомокличну тачку $q$. Тада постоји потковица у произвољној околини скупа $\{p\} \cup \mathcal{O}(q)$.*




Слика 2: Потковица

**Скица доказа.** Претпоставимо да је $\dim M = 2$, пошто се идеја доказа не разликује у већим димензијама. Постоје локалне координате око тачке $p$ које сликају $p$ у координатни почетак, $W^u(p)$ у $x$-осу, а $W^s(p)$ у $y$-осу, тако да ћемо претоставити да смо у таквом амбијенту.

Нека је $\lambda \in (0,1)$ такво да је

$$\|df_0 v_s\| < \lambda \|v_s\|, \quad \|df_0^{-1} v_u\| < \lambda \|v_u\|,$$

за $v = (v_u, v_s) \in E^u \times E^s$. Подсетимо се да смо са $K^s_a$ и $K^u_a$ означавали стабилни и нестабилни конус величине $a$. Фиксирајмо $\delta > 0$ и одаберимо околину $\mathcal{U}$ координатног почетка такву да за $x \in \mathcal{U}$ важи

$$\begin{aligned} df_x(K^u_{\delta/2}) &\subset K^u_{\delta/2}, \quad v \in K^u_{\delta/2} \Rightarrow \|df_x^{-1} v\| < \lambda \|v\|, \\ df_x^{-1}(K^s_{\delta/2}) &\subset K^s_{\delta/2}, \quad v \in K^s_{\delta/2} \Rightarrow \|df_x v\| < \lambda \|v\|. \end{aligned}$$

Пошто тачка $q$ припада $W^s(0)$ и $W^u(0)$, важи

$$f^n(q),\ f^{-n}(q) \in \mathcal{U}, \quad n \geq n_0.$$

Пошто су простори $W^s(0)$ и $W^u(0)$ $f$-инваријантни, то је $f^n(q) \in W^s(0) \cap W^u(0)$ за свако $n$. Како је $f$ дифеоморфизам и $W^s(0)$ и $W^u(0)$ се секу трансверзално у тачки $q$, то добијамо пребројиво много трансверзалних пресека многострукости $W^s(0)$ и $W^u(0)$.

Посматраћемо правоугаоник $R$ чије су странице паралелне координатним осама, који је близу $y$-осе и чија је страница паралелна $x$-оси са довољно мала (видети Слику 2). За погодан избор овог правоугаоника, и довољно велико $N \geq \max\{n_1, n_2\}$, за $\tilde{f} := f^N$, може се показати да $R$ и $\tilde{f}(R)$ задовољавају дефиницију потковице. Ми ћемо овде само скицирати тај доказ. За детаље погледати [1] или [2].

Нека су $f^{n_k}(q)$ и $f^{n_{k+1}}(q)$ две суседне тачке орбите $O(q)$ које припадају $W^s(0)$. Посматрајмо „парче” нестабилне многострукости између тачака $f^{n_k}(q)$ и $f^{n_{k+1}}(q)$, ово је глатки уложени једнодимензиони диск. Из Ламбда леме следи да постоји уложен диск у овом диску, који се са итерацијама пресликавња $f$ исправља (тежи ка хоризонталној дужи) и „лепи” за $x$-осу. С једне стране имамо овакво „исправљање” делова $W^u(0)$, а с друге, бесконачно много пресека са $W^s(0)$. То значи да $W^u(0)$ изгледа као на Слици 2, означено плавом бојом.

Ако применимо Ламбда лему на сваку хоризоналну дуж у правоугаонику $R$, видимо да ће после неколико $(m)$ корака правоугаоник $R$ бити близу нестабилној многострукости $W^u(0)$ (видети Слику 2). Због непрекидности сада видимо да је $f^N(R)$ (на слици наранџасто), за велико $N$ близу делова од $W^u(0)$ које смо малочас разматрали (означених плавом бојом).

Закључујемо да ћемо, за довољно велико $N$ добити пресликавање $\tilde{f}$ које је исто као Смејлова потковица (ово је теже записати него нацртати, као и код саме Смејлове потковице).

$\square$

**Напомена** 8. *Теорема 7 важи и ако је p периодича хиберболичка тачка, тада потковица постоји у произвољној околини скупа* $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$.

**Литература.**

[1] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.

[2] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge university press, 1995.