1. Доказ Конлијеве теореме (основне теореме динамичких система)

Подсетимо се пре свега неких тврђења са часа које ћемо користити у доказу.

Лема. *Нека је A атрактор реверзибилног динамичког система $f : X \to X$ и R њему дуални репелер. Нека су U и V одговарајући изолатори. Тада постоји јединствено $n_0 \in \mathbb{Z}$ за које важи $f^{n_0}(x) \in U \setminus f(U)$. Притом важи један од следећа два случаја:*

- *$f^{n_0-1} \in \partial U = \partial V$, а за $n < n_0 - 1$ важи $f^n(x) \in V$, или*
- *за $n < n_0$, $f^n(x) \in V$.*

Очигледно је $f^n(x) \in U$, за $n \geq n_0$. □

Теорема 1. $\mathcal{CR}(f) = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup R_n)$. □

Тврђење 2. *За свако $x \in X$, скуп $u(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid$ постоји $\varepsilon-$псеудоорбита од x ка $y\}$ је отворен и важи $f(\overline{u(x, \varepsilon)}) \subset u(x, \varepsilon)$. Одавде следи да је са*

$$A(x, \varepsilon) := \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\overline{u(x, \varepsilon)})$$

дефинисан атрактор пресликавања f.

Тврђење 3. *Нека су $x, y \in \mathcal{CR}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup R_n$. Тада је $x \sim y$ ако и само ако за свако n важи: или $x, y \in A_n$ или $x, y \in R_n$.* □

Тврђење 4. *Нека је A атрактор реверзибилног динамичког система $f : X \to X$ и R њему дуални репелер. Тада постоји непрекидна функција $\varphi : X \to [0, 1]$ за коју важи:*

1. *$\varphi^{-1}(\{0\}) = A$, $\varphi^{-1}(\{1\}) = R$,*
2. *ако $x \notin A \cup R$, онда важи $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$.*

Доказ. Нека је U изолатор за A. Дефинишимо функцију $\psi : X \to [0, 1]$ са:

$$\psi(x) := \frac{d(x, f(\overline{U}))}{d(x, f(\overline{U})) + d(x, X \setminus U)}.$$

Функција ψ је непрекидна и задовољава $\psi(f(\overline{U})) = \{0\}$, $\psi(X \setminus U) = \{1\}$. Нека је $a_n > 0$ било који двострани ($n \in \mathbb{Z}$) низ позитивних реалних бројева за који важи

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1.$$

Дефинишимо функцију $\varphi : X \to [0,1]$ као

$$\varphi(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \psi(f^n(x)).$$

Како горњи ред равномерно конвергира, то је функција φ непрекидна и није тешко видети да је, за $x \in A$, $\varphi(x) = 0$, а за $x \in R$, $\varphi(x) = 1$ (због инваријантности скупова A и R).

Ако $x \notin A \cup R$, тада из Леме видимо да низ $\psi(f^n(x))$ изгледа овако:

$$\dots, 1, 1, \dots, 1, c, 0, 0, \dots, 0, \dots,$$

где је број c на месту n_0, и то

- $c = 0$ ако $f^{n_0}(x) \in f(\overline{U})$
- $c \in (0,1)$ ако $f^{n_0}(x) \in U \setminus f(U)$.

Зато низ $\psi(f^{n+1}(x))$ изгледа овако:

$$\dots, 1, 1, \dots, 1, c, 0, 0, \dots, 0, \dots,$$

где је број c сада на месту $n_0 - 1$. Одавде закључујемо да је

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n_0-1} a_n + c\, a_{n_0}, \qquad \varphi(f(x)) = \sum_{n=-\infty}^{n_0-2} a_n + c\, a_{n_0-1},$$

па је

$$\varphi(x) - \varphi(f(x)) = a_{n_0-1}(c-1) - c\, a_{n_0} < 0.$$

□

Сада можемо да докажемо Конлијеву теорему.

Теорема 5. (Конли) *Нека је X компактан метрички простор и f реверзибилни динамички систем. Тада постоји непрекидна фукнција $V : X \to \mathbb{R}$ која задовољава:*

(а) *за $x \notin \mathcal{CR}(f)$ важи $V(f(x)) < V(x)$*

(б) *за $x, y \in \mathcal{CR}(f)$ важи $V(x) = V(y)$ ако и само је $x \sim y$; специјално $V(f(x)) = V(x)$*

(в) *$V(\mathcal{CR}(f))$ је комактан нигде густ подскуп скупа $\mathbb{R}$.*

Конлијева теорема нам каже да се многе занимљиве ствари у динамичком систему одвијају у оквиру скупа ланчано рекурентних тачака, будући да је систем градијентног типа прилично једноставан динамички систем.

Доказ. (а) Нека је $\mathcal{CR}(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup R_n)$ из Теореме 1 и нека је φ_n функција из Тврђења 4 придружена пару (A_n, R_n). Дефинишимо

$$V(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varphi_n(x)}{3^n}.$$

Функција V је непрекидна као равномерна сума непрекидних функција. Ако $x \notin \mathcal{CR}(f)$, тада постоји n такво да $x \notin A_n \cup R_n$, па из Тврђења 4 имамо да је $\varphi_n(f(x)) < \varphi_n(x)$, одакле следи да је и $V(f(x)) < V(x)$.

(б) Нека су $x, y \in \mathcal{CR}(f)$. Приметимо да је $V(x) = V(y)$ ако и само ако је, за свако n, $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$ што је еквивалентно са тим да је, за свако n, или $x, y \in A_n$ или $x, y \in R_n$. Сада доказ тачке (б) следи из Тврђења 3.

(в) Ако $x \in \mathcal{CR}(f)$, тада, за свако n, $x \in A_n \cup R_n$, па $\varphi_n(x) \in \{0, 1\}$ за свако n, одакле следи да је $V(\mathcal{CR}(f))$ садржано у стандардном Канторовом скупу. $\square$