4. Инваријантни конуси и стабилност

1 Инваријантни конуси

У неким ситуацијама је згодније бавити се хиперболичким скуповима помоћу инваријантних конуса, који дају једну карактеризацију хиперболичности.

Нека је Λ хиперболички скуп пресликавања $f : U \to M$. Како су дистрибуције E^s и E^u непрекидне (Тврђење 1 из претходне лекције), можемо да их непрекидно продужимо на отворен подскуп $\mathcal{O} \subseteq U$ који садржи Λ. Претпоставимо да је метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из Тврђења 2 из претходне лекције (таква да је $C = 1$). За $x \in \mathcal{O}$, $v \in T_xM$ дефинишимо $v_s \in E^s(x)$, $v_u \in E^u(x)$ такве да је $v = v_s + v_u$. За $\alpha > 0$ дефинишимо *стабилни и нестабилни конус* величине α као

$$K^s_\alpha(x) := \{v \in T_xM \mid \|v_u\| \leq \alpha \|v_s\|\}, \quad K^u_\alpha(x) := \{v \in T_xM \mid \|v_s\| \leq \alpha \|v_u\|\}.$$

Означимо са $\Lambda_\varepsilon := \{x \in U \mid d(x, \Lambda) < \varepsilon\}$.

Тврђење 1. *За свако $\alpha > 0$ постоји $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$, такво да $f^j(\Lambda_\varepsilon) \subset \mathcal{O}$, за $j = -1, 0, 1$, и да, за свако $x \in \Lambda_\varepsilon$ важи:*

$$df_x K^u_\alpha(x) \subseteq \mathrm{Int}\big(K^u_\alpha(f(x))\big) \cup \{0\}, \quad u \quad df^{-1}_{f(x)} K^s_\alpha(f(x)) \subseteq \mathrm{Int}\big(K^s_\alpha(x)\big) \cup \{0\}.$$

Доказ. Тврђење очигледно важи за $x \in \Lambda$, па из непрекидности df и df^{-1} и компактности скупа Λ следи да важи и на Λ_ε за неко ε. $\square$

Тврђење 2. *За свако $\delta > 0$ постоје $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ такви да је $f^j(\Lambda_\varepsilon) \subset \mathcal{O}$, за $j = -1, 0, 1$, и да, за свако $x \in \Lambda_\varepsilon$ важи:*

$$v \in K^u_\alpha(f(x)) \ \Rightarrow \ \|df^{-1}_{f(x)} v\| \leq (\lambda + \delta)\|v\|; \quad v \in K^s_\alpha(x) \ \Rightarrow \ \|df_x v\| \leq (\lambda + \delta)\|v\|.$$

Доказ. Нека је $M = \max_\Lambda \|df\|$ и $\alpha < \delta / M$. Нека је $x \in \Lambda$, $v \in K^s_\alpha(x)$ и $\|v\| = 1$. Тада је $\|v_s\| \leq \alpha$, па имамо:

$$\|df_x v\| \leq \|df_x v_s\| + \|df_x v_u\| \leq M\alpha + \lambda < \delta + \lambda = (\delta + \lambda)\|v\|.$$

Због непрекидности df и компактности јединичног тангентног раслојења дуж скупа Λ горња неједнакост важи за $x \in \Lambda_\varepsilon$, $\|v\| = 1$, одакле она следи и за све v. $\square$

Следеће тврђење је обрат претходна два.

Тврђење 3. *Нека $f : U \to M$ и $\Lambda \subset U$ компактан и f-инваријантан. Ако постоје непрекидне дистрибуције $E^s(x)$ и $E^u(x)$, такве да је $E^s(x) \oplus E^u(x) = T_xM$ и $\alpha > 0$ такво да за α-конусе $K^s_\alpha(x)$ и $K^u_\alpha(x)$ важи:*

1. *$df_x K^u_\alpha(x) \subset K^u_\alpha(f(x))$ и $df^{-1}_{f(x)} K^s_\alpha(f(x)) \subset K^s_\alpha(x)$;*

2. $\|df_x v\| < \|v\|$ *за сваки ненула* $v \in K^s_\alpha(x)$ *и* $\|df^{-1}_{f(x)} v\| < \|v\|$ *за сваки ненула* $v \in K^u_\alpha(x)$,

тада је Λ *хиперболички скуп.*

Доказ. Захваљујући компактности јединичног тангентног раслојења дуж скупа Λ, можемо да нађемо константу $\lambda \in (0,1)$ за коју важи

$$v \in K^s_\alpha(x) \;\Rightarrow\; \|df_x v\| \le \lambda \|v\|; \quad v \in K^u_\alpha(f(x)) \;\Rightarrow\; \|df^{-1}_{f(x)} v\| \le \lambda \|v\|.$$

Одавде индкуцијом добијамо да је

$$v \in K^s_\alpha(x) \;\Rightarrow\; \|df^n_x v\| \le \lambda^n \|v\|$$

и слично за нестабилни конус. Зато ако дефинишемо

$$E^s(x) := \bigcap_{n=0}^{\infty} df^{-n}_{f^n(x)} K^s_\alpha(f^n(x)), \quad E^u(x) := \bigcap_{n=0}^{\infty} df^{n}_{f^{-n}(x)} K^u_\alpha(f^{-n}(x)),$$

завршавамо доказ (можемо узети да је $C = 1$ у дефиницији хиперболичности). □

2 Стабилност хиперболичности

У овом поглављу доказујемо стабилност својства хиперболичности, помоћу карактеризација инваријантним конусима и својствима сенчења које смо до сад извели.

Тврђење 4. *Нека је* Λ *хиперболички скуп пресликавања* $f : U \to M$. *Постоји отворен скуп* $\mathcal{O} \supset \Lambda$ *и* $\varepsilon > 0$ *такви да ако је* $g : U \to M$ *дифеоморфизам за који важи* $\mathrm{dist}_1(f,g) < \varepsilon$ *и* $K \subset \mathcal{O}$ *g-инваријантан компакт, онда је* K *хиперболички за* g.

Доказ. Претпоставимо да је $C = 1$ (Тврђење 2 из претходне лекције). Продужимо дистрибуције E^s_f и E^u_f до непрекидних дистрибуција на $\mathcal{O} \supset \Lambda$. Изаберимо $\varepsilon > 0$ довољно мало, и ако треба, смањимо околину $\mathcal{O}$ тако да свако g за које важи $\mathrm{dist}_1(f,g) < \varepsilon$ и $K \subset \mathcal{O}$ задовољава тачке 1. и 2. из Тврђења 3 за стабилне и нестабилне конусе дефинисане на $\mathcal{O}$. □

Последица 5. *Скуп Аносовљевих дифеоморфизама је отворен у скупу свих дифеоморфизама са топологијом дегинисаном* dist_1 *метриком.* □

Тврђење 6. *Нека је* Λ *хиперболички скуп пресликавања* $f : U \to M$. *За сваки отворен скуп* $V \subset U$ *који садржи* Λ, *и за свако* $\varepsilon > 0$, *постоји* $\delta > 0$ *такво да за свако* $g : V \to M$ *за које је* $\mathrm{dist}_1(f,g) < \delta$, *постоји хиперболички скуп* $K \subset V$ *пресликавања* g *и хомеоморфизам* $\chi : K \to \Lambda$ *такав да је* $\chi \circ g|_K = f|_\Lambda \circ \chi$ *и да је* $\mathrm{dist}_0(\chi, \mathrm{Id}) < \varepsilon$.

Доказ. Хоћемо да применимо Теорему 8 из претходне лекције. Изаберимо да је $X := \Lambda$, $h := f|_\Lambda$, и $\phi : \Lambda \hookrightarrow U$ инклузија. Нека је ψ из Теореме 8 такво да је

$$\psi \circ f|_\Lambda = g \circ \psi.$$

Нека је $K := \psi(\Lambda)$. Применимо поново Теорему 8, сада за $X := K$, $h := g|_K$ и $\phi : K \hookrightarrow M$ инклузију. Добијамо пресликавање $\psi' : K \to U$, за које важи

$$\psi' \circ g|_K = f|_\Lambda \circ \psi'.$$

Одавде закључујемо да је

$$\psi \circ f|_\Lambda \circ \psi' = g \circ \psi \circ \psi' \Rightarrow \psi \circ \psi' \circ g|_K = g|_K \circ \psi \circ \psi'.$$

Из јединствености пресликавања које остварује горњу конјугацију (конкретно $\psi \circ \psi'$), закључујемо да је $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}$, и слично, да је $\psi' \circ \psi = \mathrm{Id}$, односно да је $\psi' = \psi^{-1}$, па је ψ хомеоморфизам. Како је ϕ идентитет на K, Теорема 8 нам такође каже да је пресликавање $\chi := \psi'$ је близу идентитету. Из Тврђења 3 следи да је скуп K хиперболички за пресликавање g. □

Дефиниција 7. Глатки дифеоморфизам глатке многострукости је *структурално стабилан* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за сваки глатки дифеоморфизам g који је на dist_1-растојању од f за мање од δ постоји хомеоморфизам $h : M \to M$ такав да важи

$$f \circ h = h \circ g, \quad \text{и} \quad \mathrm{dist}_0(h, \mathrm{Id}) < \varepsilon.$$

◇

Важан пример структурално стабилних дифеоморфизама су Аносовљеви дифеоморфизми.

Следећи став нам је потребан за формулацију локалне теореме о стабилној и нестабилној многострукости у наредној лекцији (Теорема 6).

Тврђење 8. Нека је Λ хиперболички скуп за f, са $C = 1$. За свако δ постоји ε такво да се дистрибуције E^s и E^u могу непрекидно проширити на $\Lambda_\varepsilon = \{x \in U \mid d(x, \Lambda) < \varepsilon\}$ и то тако да важи:

1. E^s је непрекидна на Λ_ε^s, E^u је непрекидна на Λ_ε^u, где су

$$\Lambda_\varepsilon^s := \{x \in U \mid d(f^n(x), \Lambda) < \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}_0\}$$
$$\Lambda_\varepsilon^u := \{x \in U \mid d(f^{-n}(x), \Lambda) < \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}_0\};$$

2. за $x \in \Lambda_\varepsilon \cap f(\Lambda_\varepsilon)$ је $df_x E^s(x) = E^u(f(x))$ и $df_x E^u(x) = E^u(f(x))$;

3. за $x \in \Lambda_\varepsilon$ и $v \in E^s(x)$ је $\|df_x v\| < (\lambda + \delta)\|v\|$;

4. за $x \in \Lambda_\varepsilon$ и $v \in E^u(x)$ је $\|df_x^{-1} v\| < (\lambda + \delta)\|v\|$.

Доказ. Домаћи (Љ5). □