5. Стабилна и нестабилна многострукост

(Мислим да је ово градиво за две недеље.)

1 Случај хиперболичке фиксне тачке

Прво ћемо доказати локалну теорему о стабилној многострукости у случају хиперболичке фиксне тачке. Нека је је $f : U \to M$ глатко и $x \in U$ хиперболичка фиксна тачка пресликавања f.

Означимо са

$$W^s_{\mathrm{loc},\delta}(x,f) := \{y \in U \mid d(f^n(y),x) < \delta,\, n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} f^n(y) = x\},$$
$$W^u_{\mathrm{loc},\delta}(x,f) := \{y \in U \mid d(f^{-n}(y),x) < \delta,\, n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} f^n(y) = x\}$$

локалну стабилну и нестабилну многострукост тачке x.

Теорема 1. (Локална теорема о стабилној и нестабилној многострукости.) *За довољно мало δ, локална стабилна и нестабилна многострукост $W^s_{\mathrm{loc},\delta}(x)$ и $W^u_{\mathrm{loc},\delta}(x)$ су утопљене C^1-подмногострукости од M дифеоморфне лоптама у $E^s(x)$, тј. $E^u(x)$.*

За доказ Теореме 1 потребно нам је следеће тврђење. Кажемо да је реверзибилно линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *линеарни хиперболички динамички систем* ако је матрица пресликавања хиперболичка, или, еквивалентно, ако је читаво $\mathbb{R}^m$ хиперболички скуп пресликавања L (Домаћи (Л5)). У овом случају имамо разлагање простора $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ које не зависи од x.

За произвољни реверзибилни динамички систем $f : X \to X$, означимо са

$$W^s(x,f) := \{y \in X \mid f^n(y) \to x,\, n \to \infty\}, \quad W^u(x,f) := \{y \in X \mid f^{-n}(y) \to x,\, n \to \infty\}$$

стабилну и нестабилну многострукост тачке x.

Из Домаћег (М1) следи да је за хиперболичко пресликавање L и Липшицово пресликавање g са довољно малом Липшицоцом константном, збир $f := L + g$ би-Липшицово пресликавање, самим тим и реверзибилни динамички систем.

Из неких техничких разлога (следећу) теорему је лакше доказати за нестабилну него за стабилну многострукост. Наравно, аналогно тврђење важи и за стабилну многострукост, уместо f се посматра f^{-1}.

Тврђење 2. *Нека је $M = \mathbb{R}^m$ и $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ линеарни хиперболички динамички систем, $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$, и $\|\cdot\|$ метрика за коју је $C = 1$ и за коју важи*

$$\|(v_s, v_u)\| = \max\{\|v_s\|_s, \|v_u\|_u\},$$

за неке норме $\|\cdot\|_s$ на E^s и $\|\cdot\|_u$ на E^u.[1] *Тада постоји δ такво да ако је $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ Липшицово, са Липшицовом константом мањом од δ и за које је $g(0) = 0$, и $f := g + L$,*

[1]Оваква метрика увек постоји, видети Домаћи (М2).

онда постоји Липшицово пресликавање $\xi : E^u \to E^s$ са Липшицовом константом мањом или једнаком 1, за које важи $\xi(0) = 0$ и $W^u(0, f) = \mathrm{Graph}(\xi)$.

Доказ. Наравно проблем ћемо свести на проблем тражења фиксне тачке и примене Банаховог става. Нека је

- $\mathrm{co}(L) := \inf\{\|Lv\| \mid \|v\| = 1\}$ *конорма* линеарног пресликавања (која није норма на простору линерних пресликавања)
- $\tau(L) := \max\{\|L|_{E^s}\|_\infty, \|L^{-1}|_{E^u}\|_\infty\}$
- $\delta := \min\left\{\frac{1-\tau(L)}{2}, \mathrm{co}(L)\right\}$.

Нека су f и g као у поставци. Прво ћемо пронаћи пресликавање $\xi : E^u \to E^s$ које је Липшицово са Липшицовом константом мањом или једнаком 1, за које важи $\xi(0) = 0$ и

$$f(\mathrm{Graph}(\xi)) \subseteq \mathrm{Graph}(\xi), \tag{1}$$

па ћемо после доказати да важи и $\mathrm{Graph}(\xi) = W^u(0, f)$.

Корак I: пронаћи контракцију. Приметимо да је (1) еквивалентно услову

$$\xi(f_u(v, \xi(v)) = f_s(v, \xi(v)), \quad \text{за } v \in E^u,$$

где са f_u означавамо пројекцију од f на E^u итд. Пошто је $L_u(\xi(v)) = 0$ и $L_s(v) = 0$, ово се своди на

$$\xi(L_{uu}v + g_u(v, \xi(v)) = L_{ss}\xi(v) + g_s(v, \xi(v)), \text{ тј.} \quad \xi((L_{uu} + g_s(\mathrm{Id}_u, \xi)) = L_{ss}\xi + g_S(\mathrm{Id}_u, \xi),$$

где са L_{ss} означавамо пресликавање $L|_{E^s} : E^s \to E^s$ и слично за L_{uu}. Означимо са $\mathrm{Lip}(f)$ Липшицову константу пресликавања f. Како је $\mathrm{Lip}(\xi) \leq 1$, то је

$$\mathrm{Lip}(g_u(\mathrm{Id}_u, \xi)) \leq 2\mathrm{Lip}(g) < 2\delta \leq 1 - \tau(L),$$

а из $\mathrm{co}(L_{uu}) \geq 1/\tau(L)$ и Домаћег (M1) закључујемо да пресликавање $L_{uu} + g_u(\mathrm{Id}_u, \xi)$ има инверз. Потражићемо фиксну тачку пресликавања F дефинисаног са

$$F(\xi) := (L_{ss}\xi + g_s(\mathrm{Id}_u, \xi))(L_{uu} + g_u(\mathrm{Id}_u, \xi))^{-1}.$$

Корак II: пронаћи Банахов простор. Дефинишимо норму на простору непрекидних пресликавања (не нужно линеарних) између два нормирана простора E и F као

$$\|\phi\|^* := \sup_{v \neq 0} \frac{\|\phi(v)\|_F}{\|v\|_E}$$

(ово је проширење дефиниције операторске норме). Нека је

$$\Sigma := \{\xi \in C^0(E^u, E^s) \mid \xi(0) = 0, \|\xi\|^* < \infty\}.$$

Домаћи (M3) је провера да је простор Σ са нормом $\|\cdot\|^*$ Банахов. Ако је $h \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ Липшицово, онда је $h \in \Sigma$ и то је $\|h\|^* \leq \mathrm{Lip}(h)$. За $a > 0$ дефинишимо

$$\Sigma_a := \{\xi \in \Sigma \mid \xi \text{ је Липшицово и } \mathrm{Lip}(\xi) \leq a\}.$$

Ако је $\xi \in \Sigma_1$, онда је $F(\xi)(0) = 0$ и $F(\xi)$ је Липшицово и

$$\mathrm{Lip}(F(\xi)) \leq \frac{\tau(L) + 2\mathrm{Lip}(g)}{\frac{1}{\tau(L)} - 2\mathrm{Lip}(g)} < 1.$$

Зато $F(\Sigma_1) \to \Sigma_1$, тако да за Банахов простор бирамо Σ_1.

Корак III: F је контракција. Овде ћемо се послужити малим триком. Нека су $\xi, \zeta \in \Sigma_1$ фиксирани, означимо са

$$A := L_{uu} + g_u(\mathrm{Id}_u, \xi) : E^u \to E^u, \quad B := L_{uu} + g_u(\mathrm{Id}_u, \zeta) : E^u \to E^u.$$

Из Домаћег (M1) следи да су A и B би-Липшицова, па су оба хомеоморфизми. Одатле следи да је

$$\|\phi\|^* = \sup_{v \neq 0} \frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|\phi(A(v))\|}{\|A(v)\|} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|\phi(B(v))\|}{\|B(v)\|}$$

(у овоме се састоји трик). Нека је $v \in \mathbb{R}^m$ фиксирано. Имамо

$$\begin{aligned}
&\|F(\xi)(A(v)) - F(\zeta)(A(v))\| \leq \|F(\xi)(A(v)) - F(\zeta)(B(v))\| + \|F(\zeta)(B(v)) - F(\zeta)(A(v))\| \leq \\
&\|L_{ss}(\xi(v) - \zeta(v))\| + \|g_s(v, \xi(v)) - g_s(v, \zeta(v))\| + \mathrm{Lip}(F(\zeta))\|B(v) - A(v)\| \leq \\
&\tau(L)\|\xi(v) - \zeta(v)\| + \mathrm{Lip}(g)\|\xi(v) - \zeta(v)\| + \mathrm{Lip}(g)\|\xi(v) - \zeta(v)\| = \big((\tau(L) + 2\mathrm{Lip}(g)\big)\,\|\xi(v) - \zeta(v)\|.
\end{aligned}$$

У претпоследњој неједнакости смо користили да је $\mathrm{Lip}(F(\zeta)) < 1$. Пошто је $g(0) = 0$ и $\xi(0) = 0$, имамо

$$\begin{aligned}
\|A(v)\| &= \|L_{uu}v + g_u(v, \xi(v)) - g_u(0, \xi(0)\| \geq \\
&\frac{1}{\tau(L)}\|v\| - \mathrm{Lip}(g)(\|v\| + \mathrm{Lip}(\xi)\|v\|) \geq \left(\frac{1}{\tau(L)} - 2\mathrm{Lip}(g)\right)\|v\|.
\end{aligned}$$

Комбиновањем последње три издвојене формуле добијамо:

$$\|F(\xi) - F(\zeta)\|^* \leq \frac{\tau(L) + 2\mathrm{Lip}(g)}{\frac{1}{\tau(L)} - 2\mathrm{Lip}(g)} \cdot \sup_{v \neq 0} \frac{\|\xi(v) - \zeta(v)\|}{\|v\|} = \frac{\tau(L) + 2\mathrm{Lip}(g)}{\frac{1}{\tau(L)} - 2\mathrm{Lip}(g)}\|\xi - \zeta\|^*.$$

Корак IV: Крај. Из Банаховог става о фиксној тачки следи да постоји јединствено $\xi = \xi(g)$ такво да важи (1).

Приметимо и следеће: ако је $(v, \xi(v)) \in \mathrm{Graph}(\xi)$, и $u := A^{-1}v$, онда је $f(u, \xi(u)) = (v, \xi(v))$. Заиста:

$$\begin{aligned}
&f(u, \xi(u)) = f(A^{-1}v, \xi(A^{-1}v)) = L(A^{-1}v, \xi(A^{-1}v)) + g(A^{-1}v, \xi(A^{-1}v)) = \\
&\big(L_{uu}(A^{-1}v) + g_u(A^{-1}v, \xi(A^{-1}v)), L_{ss}(\xi(A^{-1}v)) + g_s(A^{-1}v, \xi(A^{-1}v))\big) = \\
&\big(\underbrace{\big[L_{uu} + g_u(\mathrm{Id}_u, \xi)\big] \circ A^{-1}v}_{v}, \underbrace{L_{ss}\xi(A^{-1}v) + g_s(A^{-1}v, \xi(A^{-1}v)}_{\xi\left[L_{uu} + g_u(\mathrm{Id}_u, \xi)\right] \circ A^{-1}v)}\big) = (v, \xi(v)).
\end{aligned}$$

Одавде закључујемо да заправо важи $f(\mathrm{Graph}(\xi)) = \mathrm{Graph}(\xi)$. Остало је још да докажемо да је $\mathrm{Graph}(\xi) = W^u(0, f)$. Из $\xi(0) = 0$ и $\mathrm{Lip}(\xi) \leq 1$, имамо да је $\mathrm{Graph}(\xi) \subseteq K_1^u$. Одавде следи да је, за довољно мало δ, $\mathrm{Graph}(\xi) \subseteq W^u(0, f)$ (овај корак је садржај Домаћег (M5)).

И на крају остаје да докажемо другу инклузију, $\mathrm{Graph}(\xi) \supseteq W^u(0, f)$. Претпоставимо да постоји $v \in W^u(0, f) \setminus \mathrm{Graph}(\xi)$. Нека $w := (v_u, \xi(v_u))$, имамо $w \in \mathrm{Graph}(\xi)$ и $w_u = v_u$. Тада $v - w \notin K_1^u$, јер је $v_u - w_u = 0$, а $v_s - w_s \neq 0$. Одавде закључујемо да је $\|v - w\| = \|v_s - w_s\|_s$ (подсетимо да је овде норма дефинисана као макисмум норми на E^s и E^u).

Нека је $f^{-1} = L^{-1} + h$, тј. $h := (L + g)^{-1} - L^{-1}$. Имамо:

$$\begin{aligned}
&\|f^{-1}(v) - f^{-1}(w)\| \geq \|f_s^{-1}(v) - f_s^{-1}(w)\| = \\
&\|L_s^{-1}(v) - L_s^{-1}(w) + h_s(u) - h_s(w)\| \geq \|L_{ss}^{-1}\|_\infty \|v_s - w_s\|_s - \mathrm{Lip}(h)\|v - w\| \geq \\
&\frac{1}{\|L_{ss}\|_\infty}\|v - w\| - \mathrm{Lip}(h)\|v - w\| \geq \left(\frac{1}{\tau(L)} - \mathrm{Lip}(h)\right)\|v - w\|.
\end{aligned} \tag{2}$$

Приметимо да је

$$h = (L + g)^{-1} - L^{-1} = L^{-1}\left((\mathrm{Id} + L^{-1}g)^{-1} - \mathrm{Id}\right),$$

па ако смањимо $\mathrm{Lip}(g)$, можемо направити $\mathrm{Lip}(h)$ произвољно малим, тј. толико да важи

$$\frac{1}{\tau(L)} - \mathrm{Lip}(h) > 1.$$

Одатле и из (2) следи да

$$\|f^{-n}(v) - f^{-n}(w)\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

што је контрадикција са

$$\|f^{-n}(v) - f^{-n}(w)\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Последња једнакост важи јер $v, w \in W^u(0, f)$. $\square$

Напомена 3. *Може се доказати да ако је g класе C^1, онда је то и ξ. Овај доказ је доста технички сложен и овде га изостављамо.* $\diamond$

Доказ Теореме 1. Пошто је теорема локалне природе можемо да претпоставимо да је $U \subset \mathbb{R}^m = M$. Претпоставимо да је $x = 0$ и $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ (разлагање у односу на извод df_0), као и да је норма прилагођена ($C = 1$) и настала као максимум норми на E^s и E^u. Нека је $\beta : U \to [0, 1]$ C^∞-функција таква да је

$$\beta(v) = \begin{cases} 1, & \|v\| \leq 1/3; \\ 0, & \|v\| \geq 2/3. \end{cases}$$

Дефинишимо $g := f - df_0 : U \to \mathbb{R}^m$. Имамо да важи $g(0) = 0$ ($f(0) = 0$ јер је 0 фиксна тачка) и $dg_0 = 0$. Нека је $r > 0$ довољно мало тако да је $B(0, 3r) \subseteq U$; дефинишимо

$$g^r(v) := \beta\left(\frac{v}{3r}\right) g(v).$$

Пресликавање g^r је класе C^1 и поклапа се са g на $B(0,r)$. Може се показати (Домаћи (M6)) да $\mathrm{Lip}(g^r) \to 0$, кад $r \to 0$. Нека је r толико мало да g^r задовољава претпоставке Тврђења 2 и Домаћег (M4). Постоји C^1-пресликвање $\xi^r : E^s \to E^u$ такво да важи $\xi^r(0) = 0$ и $\mathrm{Lip}(\xi^r) \leq 1$ и да је $W^s(0, df_0 + g^r) = \mathrm{Graph}(\xi^r)$. Означимо са

$$f^r := df_0 + g^r.$$

Приметимо да је 0 фиксна тачка и пресликавања f^r $(g^r(0) = g(0))$. Ако је $\mathrm{Lip}(g^r)$ довољно мало, тада је и $\|dg^r_0\|$ мало, па из Домаћег (Љ6) следи да је да је 0 хиперболичка фиксна тачка и пресликавања f^r, као и да је хиперболичко разлагање за f^r у нули баш $E^s \oplus E^u$.

Докажимо да је $T_0\mathrm{Graph}(\xi^r) = T_0 W^s(0, f^r) = E^s$. Нека је $v \in T_0 W^s(0, f^r)$ и γ крива у $W^s(0, f^r)$ таква да је $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = v$. Имамо

$$(f^r)^n(\gamma(t)) = (f^r)^n(\gamma(0)) + d((f^r)^n)(\gamma(0))\gamma'(0) \cdot t + o(t) = 0 + (df^r)^n(0)v \cdot t + o(t), \quad t \to 0.$$

Одавде следи да је за неко t

$$\|(f^r)^n(\gamma(t))\| \geq \frac{1}{2}\|(df^r)^n(0)v\| \cdot |t|. \tag{3}$$

Како је $\gamma(t) \in W^s(0, f^r)$, то је

$$\lim_{n\to\infty} (f^r)^n(\gamma(t)) = 0$$

за свако t, па и десна страна у изразу (3) тежи нули кад $n \to \infty$, тј. $\|(df^r)^n(0)v\| \to 0$, кад $n \to \infty$. Није тешко видети да је ово немогуће ако v не припада E^S. Заиста, у супротном имамо $v = v_s + v_u$ и $(df^r)^n(0)v = (df^r)^n(0)v_s + (df^r)^n(0)v_u$. Израз $(df^r)^n(0)v_s$ тежи нули кад $n \to \infty$. С друге стране, ако $v_u \neq 0$, из $(df^r)^n(0)v_u \in E^u$ имамо

$$\|v_u\| = \|(df^r)^{-n}(0)(df^r)^n(0)v_u\| \leq \lambda^n \|(df^r)^n(0)v_u\|,$$

и $\lambda \in (0,1)$, па $\|(df^r)^n(0)v_u\| \to \infty$, кад $n \to \infty$, односно мора бити $v_u = 0$, тј. $T_0 W^s(0, f^r) = E^s$.

Због начина на који је дефинисана норма, имамо да је $B_{\mathbb{R}^m}(0,r) = B_{E^s}(0,r) \times B_{E^u}(0,r)$. Дефинишимо C^1-улагање $i_r : E^s \to \mathbb{R}^m$:

$$i_r(v) := (v, \xi^r(v)).$$

Имамо да је $i_r(E^s) = \mathrm{Graph}(\xi^r)$, и како је $\mathrm{Lip}(\xi^r) \leq 1$:

$$i_r(B_{E^s}(0,r)) = W^s(0, f^r) \cap B_{\mathbb{R}^m}(0,r).$$

Тврдимо да је

$$W^s_{\mathrm{loc},r}(0, f) = W^s(0, f^r) \cap B_{\mathbb{R}^m}(0,r). \tag{4}$$

Пошто је $g^r = g$ на $B_{\mathbb{R}^m}(0,r)$, имамо

$$W^s_{\mathrm{loc},r}(0, f) \subseteq W^s(0, f^r) \cap B_{\mathbb{R}^m}(0,r).$$

Ако $v \in W^s(0, f^r) \cap B_{\mathbb{R}^m}(0, r)$, онда је $(f^r)^n(v) = f^n(v)$, за свако $n \geq 0$, па, пошто из домаћег (М4) знамо да је

$$W^s(0, f^r) = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \|(f^r)^n(v)\| \leq (\tau(df_0) + \mathrm{Lip}(g^r))^n \|v\|\},$$

закључујемо да је $(f^r)^n(v) \in B_{\mathbb{R}^m}(0, r)$, и одатле

$$W^s_{\mathrm{loc},r}(0, f) = i_r(B_{E^s}(0, r)),$$

што значи да је $W^s_{\mathrm{loc},r}(0, f)$ утопљена C^1-многострукост дифеоморфна лопти $B_{E^s}(0, r)$.

$\square$

2 Општи случај хиперболичког скупа

Нека је Λ хиперболички скуп дифеоморфизма $f : U \to M$. Означимо са

$$\Lambda^s_\delta := \{x \in U \mid d(f^n(x), \Lambda) < \delta,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\}, \quad \Lambda^u_\delta := \{x \in U \mid d(f^{-n}(x), \Lambda) < \delta,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Дефиниција 4. За $x_s \in \Lambda^s_\delta$ и $x_u \in \Lambda^u_\delta$ дефинишимо *локалну стабилну многострукост* тачке x_s као

$$W^s_\varepsilon(x_s) := \{y \in M \mid d(f^n(x_s), f^n(y)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}_0\},$$

и *локалну нестабилну многострукост* тачке x_u као

$$W^u_\varepsilon(x_u) := \{y \in M \mid d(f^{-n}(x_u), f^{-n}(y)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}_0\}.$$

$\diamond$

Главни резултат опште теореме о стабилној и нестабилној многострукости је да су скупови $W^s_\varepsilon(x_s)$ и $W^u_\varepsilon(x_u)$ утопљени C^1-дискови одговарајућих димензија. Следећа теорема нам даје више података. Доказ се (очекивано) ослања на Банахов став о фиксној тачки, уз доста техничких корака. Овде га изостављамо, а читаоца упућујемо на [1].

Теорема 5. (Локална теорема о стабилној и нестабилној многострукости.) *Нека је $f : M \to M$ дифеоморфизам чији је $\Lambda \subset M$ хиперболички скуп са константом λ и $C = 1$. Тада постоје $\varepsilon, \delta > 0$ такви да за свако $x_s \in \Lambda^s_\delta$ и $x_u \in \Lambda^u_\delta$ важи*

1. *Скупови $W^s_\varepsilon(x_s)$ и $W^u_\varepsilon(x_u)$ су C^1-утопљени дискови;*
2. *нека су E^s и E^u непрекидно проширене на $W^s_\varepsilon(x_s)$ и $W^u_\varepsilon(x_u)$, као у Тврђењу 8 из претходне лекције 4, тада је*
$$y \in W^s_\varepsilon(x_s) \Rightarrow T_y W^s_\varepsilon(x_s) = E^s(y), \qquad y \in W^u_\varepsilon(x_u) \Rightarrow T_y W^u_\varepsilon(x_u) = E^u(y);$$
3. *$f(W^s_\varepsilon(x_s)) \subset W^s_\varepsilon(f(x_s))$ и $f^{-1}(W^u_\varepsilon(f(x_u))) \subset W^u_\varepsilon(x_u)$;*
4. *$y, z \in W^s_\varepsilon(x_s) \Rightarrow d^s(f(y), f(z)) < \lambda\, d^s(y, z)$, где је d^s растојање дуж $W^s_\varepsilon(x_s)$; слично $y, z \in W^u_\varepsilon(x_u) \Rightarrow d^u(f^{-1}(y), f^{-1}(z)) < \lambda\, d^u(y, z)$;*

5. *ако* $0 < d(x_s, y) < \varepsilon$ *и* $\exp_{x_s}^{-1}(y)$ *припада* δ*-конусу* $K_\delta^u(x_s)$*, онда* $d(f(x_s), f(y)) > \lambda^{-1} d(x_s, y)$*; слично, ако* $0 < d(x_u, y) < \varepsilon$ *и* $\exp_{x_u}^{-1}(y)$ *припада* δ*-конусу* $K_\delta^s(x_u)$*, онда* $d(f(x_u), f(y)) < \lambda\, d(x_u, y)$*;*

6. $y \in W_\varepsilon^s(x_s) \Rightarrow W_\alpha^s(y) \subset W_\varepsilon^s(x_s)$*, за неко* $\alpha > 0$*;*
   $y \in W_\varepsilon^u(x_u) \Rightarrow W_\beta^u(y) \subset W_\varepsilon^u(x_u)$*, за неко* $\beta > 0$*.* □

Дефиниција 6. Нека је $x \in \Lambda$. (Глобална) *стабилна и нестабилна многострукост* тачке x се дефинише као:

$$W^s(x) := \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0,\ n \to \infty\},$$
$$W^u(x) := \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0,\ n \to \infty\}.$$

◇

Тврђење 7. *Постоји* ε_0 *такво да, за свако* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *и* $x \in \Lambda$ *важи*

$$W^s(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W_\varepsilon^s(f^n(x)), \quad W^u(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W_\varepsilon^s(f^{-n}(x)).$$

Доказ. Домаћи (М8) □

Последица 8. (Глобална теорема о стабилној и нестабилној многострукости.) *Глобална стабилна и нестабилна многострукост су имерзоване* C^1*-подмногострукости од* M *које су хомеоморфне лопти одговарајуће димензије (*$\dim E^s(x)$ *и* $\dim E^u(x)$*).*

Доказ. Домаћи (М8). □

Литература.

[1] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.