3. Хиперболички скупови и сенчење

На курсу из диференцијалних једначина учили смо да је фиксна тачка X_* тока индукованог аутономним векторским пољем F хиперболичка ако је линеаризација $dF(X_*)$ хиперболичка матрица (она за коју важи $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$ за сваку сопствену вредност λ). Најједноставнији пример је наравно координатни почетак као еквилибријум система $X' = AX$, где је A хиперболичка матрица. У овом случају се простор $\mathbb{R}^n$ разбија на два потпростора, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m_+} \oplus \mathbb{R}^{m^-}$, где је m_+ (m_-) број сопствених вредности са позитивним (негативним) реалним делом. Дуж простора $\mathbb{R}^{m^+}$ тачке се удаљавају (есkпоненцијалном брзином) од координатног почетка, док се му се дуж простора $\mathbb{R}^{m^+}$ приближавају. Овакво разбијање на скупове дуж којих се простор скупља и шири је својство хиперболичности. Подсетимо се Хартмен–Гробманове теореме која каже да је ток (нелинеарног) система у околини хиперболичког еквилибријума X_* конјугован линеарном систему одређеном хиперболичком матрицом $A = dF(X_*)$. Одавде можемо да видимо да су хиперболичке фиксне тачке у неком смислу стабилне, својство хиперболичности матрице A је отворено својство.

Хиперболичка динамика је доста изучавана олбаст у динамичким системима, рецимо код динамичких система који задовољавају аксиому А. Хиперболички системи испољавају извесну структуралну стабилност. О овоме ће бити више речи касније. Велики допринос поручавању хиперболичке динамике дао је Стивен Смејл.

1 Хиперболички скупови

Нека је M глатка многострукост, $U \subset M$ непразан отворен скуп и $f : U \to f(U) \subset M$ глатки дифеоморфизам. Компактан, f-инваријантан подскуп $\Lambda \subset U$ називамо *хиперболичким* ако постоје константе $\lambda \in (0,1)$, $C > 0$ и фамилије потпростора $E^s(x) \subseteq T_xM$ и $E^u(x) \subseteq T_xM$, за $x \in \Lambda$, такви да важи:

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$;
2. $\|df_x^n u\| \leq C\lambda^n \|u\|$, за свако $u \in E^s(x)$, $n \geq 0$;
3. $\|df_x^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|$, за свако $v \in E^u(x)$, $n \geq 0$;
4. $df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$, $df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$.

Потпростори $E^s(x)$ и $E^u(x)$ се зову *стабилни и нестабилни потпростор* у тачки x а дистрибуције $\{E^s(x)\}_{x\in\Lambda}$ и $\{E^u(x)\}_{x\in\Lambda}$ *стабилна и нестабилна дистрибуција.* Ако је $\Lambda = M$, дифеоморфизам f се зове *Аносовљев* дифеоморфизам.

Иако дефиниција хиперболичког скупа укључује Риманову метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$, својство хиперболичности не зависи од избора метрике (Домаћи Л4).

Примери хиперболичких скупова су соленоид и Смејлова потковица. Пример Аносовљевог дифеоморфизма је хиперболички торусни аутоморфизам.

Наводимо два (техничка) трвђења чије доказе остављамо за домаћи.

Тврђење 1. *Доказати да потпростори $E^s(x)$ и $E^u(x)$ непрекидно зависе од x.* $\square$

Тврђење 2. *Нека је Λ хиперболички скуп за пресликавање f са константама λ и C. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји Риманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ дефинисана у околини скупа Λ таква да је Λ хиперболички за f са константама $C' = 1$ и $\lambda' = \lambda + \varepsilon$ и да су потпростори $E^s(x)$ и $E^u(x)$ ε-ортогонални, тј. да важи*

$$\langle u, v \rangle' < \varepsilon$$

за свако $u \in E^s(x)$, $v \in E^u(x)$, $\|u\| = \|v\| = 1$. □

2 Сенчење

Подсетимо се да је ε-псеудоорбита пресликавања f сваки коначан или бесконачан низ $\{x_k\}$ за који важи $d(f(x_k), x_{k+1}) < \varepsilon$.

Дефиниција 3. Кажемо да пресликавање f има *својство сенчења* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за сваку δ-псеудоорбиту $\{x_k\}$ постоји x такво да је $d(f^k(x), x_k) < \varepsilon$. ⋄

Пре него што формулишемо теорему Аносова о својству сенчења у близини хиперболичких скупова, погледајмо прво пар примера.

Пример 4. Нека $E_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $E_m(x) = mx \pmod 1$ и $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Нека је $\{x_k\}_{k=0}^n$ ε-псеудоорбита пресликавања f. Скуп $E_m^{-1}(x_n)$ има m елемената и за тачно један од њих, означимо га са y_n^{n-1}, важи $d(y_n^{n-1}, x_{n-1}) < \varepsilon/m$. Исто тако, скуп $E_m^{-1}(y_n^{n-1})$ има m елемената и за тачно један од њих, означимо га са y_n^{n-2}, важи $d(y_n^{j-2}, x_{n-2}) < \varepsilon/m$. Након n корака долазимо до тачке $y_n := y_n^0$ за коју важи

$$E_m^j(y_n) = y_n^j, \quad d(E_m^j(y_n), x_j) < \varepsilon,$$

за свако $j \in \{0, \ldots, n\}$. Ово је сенчење коначне ε-псеудоорбите правом орбитом.

Ако је $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ бесконачна ε-псеудоорбита, поновимо овај поступак за сваку коначну ε-псеудоорбиту $\{x_k\}_{k=0}^n$. Добијамо низ y_n са следећим својствима (доказ остављамо за домаћи):

1. постоји $\lim_{n\to\infty} y_n = y$
2. $d(E_m^j(y), x_j) \leq \varepsilon$ за свако $j \in \mathbb{N}$
3. орбита $\{E_m^n(y)\}$ је јединствена орбита која ε-сенчи псеудоорбиту $\{x_n\}$
4. y непрекидно зависи од $\{x_n\}$ у Тихоновљевој топологији.

На сличан начин се може показати да ако је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ C^1 близу пресликавању E_m, онда се свака бесконачна ε-псеудоорбита $\{x_n\}$ пресликавања f може осенчити јединственом правом орбитом $\{f^n(y)\}$ које непрекидно зависи од $\{x_n\}$ (Домаћи (Л11)).

Нека је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ C^1 близу пресликавању E_m. Посматрајмо орбиту тачке x, $\{f^n(x)\}$ као ε-псеудоорбиту. Нека је y тачка за коју орбита $\{E_m^n(y)\}$ сенчи $\{f^n(x)\}$. Тада је пресликавање $\phi : x \mapsto y$ хомеоморфизам који успоставља конјугацију између f и E_m (Домаћи (Л12)). Одавде закључујемо да је свако f које C^1-близу пресликавању E_m конјуговано пресликавању E_m. Ово значи да је пресликавање E_m *структурално стабилно.* ✓

Пример 5. Нека је матрица $A \in \mathrm{M}_2$ хиперболичка и $\det A = \pm 1$. Тада за сваки ограничени низ $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^2$ постоји јединствени ограничени низ $\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^2$ за који важи

$$w_k - Aw_{k-1} = u_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Такође постоји константа C која зависи само од матрице A таква да је

$$\sup_k \|w_k\| \leq C \sup_k \|u_k\|.$$

Доказ овог техничког тврђења остављамо за домаћи.

Нека је $\{x_k\}$ δ-псеудоорбита линеарног пресликавања $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и нека је $u_k = Ax_{k-1} - x_k$, тада је $\|u_k\| < \delta$. Нека је $\{w_k\}$ јединствени ограничени низ за који важи $w_k - Aw_{k-1} = u_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Нека је $y_k := x_k + w_k$, имамо $\|y_k - x_k\| < C\delta$ и

$$y_k = x_k + w_k = Ax_{k-1} - u_k + Aw_{k-1} + u_k = A(x_{k-1} + w_{k-1}) = Ay_{k-1}.$$

Добили смо трајекторију $\{y_k\}$ пресликавања A која сенчи псеудоорбиту $\{x_k\}$ (за $\delta > 0$ из дефиниције сенчења можемо узети $\varepsilon := \delta / C_0$. Пројекција ове орбите нам дефинише сенчење одговарајуће псеудоорбите на торусу. Ова орбита је јединствена (Домаћи (Л14)). ✓

Следећа теорема нам каже да псеудоорбите које су близу хиперболичком скупу Λ могу бити осенчене правом орбитом из Λ. За $a > 0$ означимо са Λ_a скуп свих $x \in M$ за које је $d(x, \Lambda) < a$.

Теорема 6. (Аносовљева теорема о сенчењу.) *Нека је Λ хиперболички скуп пресликавања $f : U \to M$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да сваку сваку коначну или бесконачну δ-псеудоорбиту $\{x_k\}$ за коју важи $d(x_k, \Lambda) < \delta$ за свако k, постоји $x \in \Lambda_\varepsilon$ такво да је $d(f^k(x), x_k) < \varepsilon$.* □

За доказ Аносовљеве теореме нам је потребно је једно помоћно тврђење (Теорема 8). Дефинишимо прво неке појмове.

Дефиниција 7. Ако је X тополошки простор а (Y, d) метрички простор, дефинишимо метрику на простору непрекидних пресликавања из X у Y, $C(X, Y)$, као:

$$\mathrm{dist}_0(f, g) := \min\{1, \sup_{x\in X} d(f(x), f(y))\}.$$

Ако су M и N глатке Риманове многострукости дефинишимо метрику на простору непрекидно-диференцијабилних пресликавања из M у N, $C^1(M, N)$, као

$$\mathrm{dist}_1(f, g) := \mathrm{dist}_0(df, dg),$$

где су df и dg пресликавања из јединичног тангентног раслојења T^1M у TN. ⋄

Теорема 8. *Нека је Λ хиперболички скуп пресликавања $f : U \to M$. Постоји отворен скуп $\mathcal{O}$, $\Lambda \subset \mathcal{O} \subseteq U$ и $\varepsilon_0, \delta_0 > 0$ такви да важи: за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за свако $g : \mathcal{O} \to M$, $\mathrm{dist}_1(f, g) < \varepsilon_0$, сваки хомеоморфизам $h : X \to X$ тополошког простора X и било које непрекидно пресликавање $\phi : X \to \mathcal{O}$ за које важи $\mathrm{dist}_0(\phi \circ h, g \circ \phi) < \delta$, постоји непрекидно пресликавање $\psi : X \to \mathcal{O}$ за које важи $\psi \circ h = g \circ \psi$ и $\mathrm{dist}_0(\phi, \psi) < \varepsilon$. Пресликавање ψ је јединствено у смислу да ако $\psi' : U \to M$ задовољава $\psi' \circ h = g \circ \psi'$ и $\mathrm{dist}_0(\phi, \psi') < \delta_0$, мора бити $\psi' = \psi$.*

Скица доказа. Идеја је да конструишемо Банахов простор и на њему контракцију чија ће фиксна тачка (или нека њена модификација) бити пресликавање ψ. На основу Витнијеве теореме о утапању мошемо да претпоставимо да је M подмногострускост од $\mathbb{R}^N$ за неко N. Постоји отворена подмногострукост $\mathcal{O}$ многострукости M која садржи Λ која је релативно компактан скуп и цеваста околина $\mathcal{U}$ многострукости $\mathcal{O}$ у $\mathbb{R}^N$. Нека је $g : \mathcal{O} \to M$. Ако је $\pi : \mathcal{U} \to \mathcal{O}$ пројекција дуж фибри, дефинишимо $\tilde{g}(z) = g(\pi(z))$. Означимо са $C(X,\mathcal{U})$ скуп непрекидних пресликавања из X у $\mathcal{U}$ са растојањем dist_0 и са Γ Банахов простор непрекидних пресликавања $v : X \to \mathbb{R}^N$ са униформном нормом. Дефинишимо $F : B(0,\alpha) \to \Gamma$ (где је $B(0,\alpha) \subset \Gamma$ кугла са центром у нули полупречника α) као

$$F(v)(x) := \tilde{g}(\phi(h^{-1}(x) + v(h^{-1}(x))) - \phi(x),$$

за $v \in B(0,\alpha)$, $x \in X$. Ако је v фискна тачка пресликавања F, онда за $\psi(x) := \phi(x)+v(x)$ важи $\tilde{g}(\psi(h^{-1}(x))) = \psi(x)$. Остало је да се докаже да пресликавање F (које зависи од g) има јединствену фиксну тачку која је близу ϕ и да она непрекидно зависи од g. Остатак доказа прескачемо (за детаље видети [1]). □

Доказ Теореме 6. Нека је $\mathcal{O}$ као у Теореми 8 и $\delta > 0$ довољно мало тако да је $\Lambda_\delta \subseteq \mathcal{O}$. Псеудоорбиту $\{x_k\}$ проширимо до двоструке бесконачне псеудоорбите тако што јој са леве стране додамо произвољну тачку y из Λ за коју важи $d(x_1, y) < \delta$ и дефинишимо $x_{-k} := f^{-k}(y)$. Ако је $\{x_k\}$ коначна, исту ствар удеримо и са десне стране. Применићемо Теорему 8 за $\varepsilon/2$. Изаберимо $X := \{x_k\}$ са дискретном топологијом, $g := f$, $h : X \to X$ шифт пресликавање $h(x_k) := x_{k+1}$, и $\phi : X \to U$ да буде инклузија $\phi(x_k) := x_k$. Пошто је $\{x_k\}$ псеудоорбита важи $\text{dist}_0(\phi \circ h, f \circ \phi) < \delta$, па постоји $\psi : X \to \mathcal{O}$ такво да је $\psi \circ h = g \circ \psi$ и да је $\text{dist}_0(\phi, \psi) < \varepsilon/2$. То конкретно значи да је $\psi(x_{k+1}) = f(\psi(x_k))$, па ако узмемо да је $x := \psi(x_0)$, видимо да је $\psi(x_k) = f^k(x)$. По претпоставци је $x_0 \in \Lambda_\delta$, а можемо да претпоставимо да је $\delta < \varepsilon/2$, па је

$$d(x, \Lambda) \leq d(x, x_0) + d(x_0, \Lambda) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Из $\text{dist}_0(\phi, \psi) < \varepsilon$ закључујемо $d(f^k(x), x_k) < \varepsilon$. □