8. Аносовљеви дифеоморфизми

Подсетимо се да се дифеоморфизам $f : M \to M$ зове Аносовљев ако му је хиперболички скуп читава многострукост M. Из самих дефиниција следи да је многострукост M локално максимални хиперболички скуп, као и компактна. Најједноставнији пример Аносовљевог дифеоморфизма је хиперболички торусни аутоморфизам (у свим димензијама).

Ради прегледности, навешћемо својства Аносовљевих дифеоморфизама која или следе директно из дефиниције или смо их већ извели на разним местима:

(А) За свако $x \in M$, постоји разлагање $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$ и $\lambda \in (0,1)$, као и $c > 0$, $\varepsilon > 0$, δ такви да је

1. $df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ и $df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$;
2. за $v_s \in E^s(x)$, $v_u \in E^u(x)$ је $\|df_x(v_s)\| \le \lambda\|v_s\|$ и $\|df_x^{-1}(v_u)\| \le \lambda\|v_u\|$;
3. за $y \in W^s(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0,\, n \to \infty\}$ важи $d^s(f(x), f(y)) \le \lambda\, d^s(x,y)$;
4. за $y \in W^u(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0,\, n \to \infty\}$ важи $d^u(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \le \lambda\, d^u(x,y)$;
5. $f(W^u(x)) = W^u(f(x)), \quad f(W^s(x)) = W^s(f(x))$;
6. $T_xW^u(x) = E^u(x), \quad T_xW^s(x) = E^s(x)$;
7. ако је
$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon\}$$
$$W^u_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon\}$$
тада је, за $d(x,y) < \delta$, пресек $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ једночлан; тачку пресека означавамо са $[x,y]$; пресек $[x,y]$ непрекидно зависи од тачка x и y и важи
$$d^s([x,y],x) \le c\, d(x,y), \quad d^u([x,y],y) \le c\, d(x,y).$$

(Б)

1. Аносовљеви дифеоморфизми чине отворен (не обавезно непразан) подскуп скупа $C^1(M)$;
2. Аносовљеви дифеоморфизми су структурално стабилни, тј. за свако ε постоји околина $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{Diff}^1(M)$ пресликавања f тавка да важи: за свако $g \in \mathcal{U}$ постоји хомеоморфизам $\varphi : M \to M$ такав да је
$$\varphi \circ f = g \circ \varphi, \quad \mathrm{dist}_0(\varphi, \mathrm{Id}) < \varepsilon.$$
3. Скуп периодичних тачака Аносовљевог дифеоморфизма је густ у скупу $\mathrm{NW}(f)$.

Фамилије стабилних и нестабилних многострукости придружене Аносовљевом дифеоморфизму чине две фолијације, стабилну и нестабилну. *Фолијација* је партиција многострукости димензије n на подмногострукости димензије k са следећим својством: ако са $W(x)$ означимо

подмногострукост из дате фолијације која садржи тачку x, тада постоје околина $U_x \ni x$ и пресликавање
$$h : B_{\mathbb{R}^k} \times B_{\mathbb{R}^{n-k}} \to U$$
такво да је, за свако $z \in B_{\mathbb{R}^{n-k}}$, скуп $h(B_{\mathbb{R}^k} \times \{z\})$ повезана компонента скупа $W(h(0,z)) \cap U$ која садржи $h(0,z)$. Такође захтевамо да је h одређене глаткости (или непрекидно) и у зависности од тога фолијацију називамо глатком или непрекидном. Може се показати да су стабилна и нестабилна фолијација Аносовљеве многострукости Хелдер непрекидна (не морају бити ни Липшицова, самим тим ни глатка). Ми то нећемо овде радити, читаоца упућујемо на [1].

Доказаћемо још неке специфичности Аносовљевог дифеоморфизма.

Дефиниција 1. Динамички систем $f : X \to X$ је *тополошко миксирање* ако за свака два непразна отворена скупа U и V постоји $N \in \mathbb{N}$ такво да је $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ за свако $n \geq N$. $\diamond$

Теорема 2. *Нека је $F : M \to M$ Аносовљев. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1) $\mathrm{NW}(f) = M$

(2) свака нестабилна многострукост је густа у M;

(3) свака стабилна многострукост је густа у M;

(4) f је тополошки транзитивно;

(5) f је тополошко миксирање.

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2): Претпоставимо да је $\mathrm{NW}(f) = M$. Из својства (Б2) знамо да је скуп периодичних тачака густ у M. Нека је $\varepsilon > 0$ дато, и довољно мало да важи својство (А7). Нека су $x_1, \ldots, x_N$ периодичне тачке које чине $\varepsilon/4$ мрежу у M. Нека је p производ свих периода тачака $x_1, \ldots, x_N$ и $g := f^p$. Стабилне и нестабилне многострукости пресликавања f и g се поклапају (зашто?). Да бисмо завршили доказ инклузије (1) $\Rightarrow$ (2) потребна нам је следећа лема.

Лема 3. *За довољно мало ε, постоји природан број q такав да ако за неке y, i и j важи*

$d(W^u(y), x_i) < \varepsilon/2,\ d(x_i, x_j) < \varepsilon/2,$ *онда је:* $d(g^{nq}(W^u(y)), x_i) < \varepsilon/2,\ d(g^{nq}(W^u(y)), x_j) < \varepsilon/2,$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Доказ Леме 3. Ако је потребно, смањићемо ε тако да из својства (А7) следи да постоји $z \in W^u(y) \cap W^s_{\varepsilon_1}(x_i)$ и то тако да је $d(g^n(z), x_i) < \varepsilon/2$ за свако $n \geq n_0$ (ово важи због својства (А3), тачке $x_1, \ldots, x_N$ су фиксне за g). При томе n_0 зависи од ε а не и од z. Из услова Леме и неједнакости имамо да је $d(g^n(z), x_j) < \varepsilon$, па поново из (А7) закључујемо да постоји $w \in W^(g^n(z)) \cap W^s_{\varepsilon_1}(x_j)$, па је $d(g^n(w), x_j) < \varepsilon/2$ за $n \geq m_0$, при чему m_0 зависи од ε а не и од w. Тврђење сада важи ако за q узмемо већи од бројева n_0, m_0. $\square$

Крај доказа (1) $\Rightarrow$ (2)**:** Нека је $y \in M$ произвољно. Како тачке $x_1, \ldots, x_N$ чине $\varepsilon/4$-мрежу, за сваке две тачке x_l и x_r постоји највише N периодичних тачака $x_{k_1}, \ldots, x_{k_N}$ таквих да је $x_l = x_{k_1}$, $x_r = x_{k_N}$ и растојање од x_i до x_{i+1} је мање од $\varepsilon/2$ (Домаћи (Њ9)). Знамо је

$d(W^u(y), x_i) < \varepsilon/4$ за неко i. Нека је $x_0 \in \{x_1, \dots, x_N\}$ произвољно. До тачке x_0 „стижемо” за $N_1 \leq N$ корака преко тачака које су на растојању мањем од $\varepsilon/2$. Применимо Лему 3 N_1 пута, добијамо да је $d(g^q(W^u(y)), x_0) < \varepsilon/2$. Како ово важи за свако $x_0 \in \{x_1, \dots, x_N\}$, закључујемо да је $g^q(W^u(y)) = W^u(g^q(y))$ ε-густ, па је то и $W^u(x)$ за свако $x \in M$.

(1) $\Rightarrow$ (2) се доказује исто.

(2) $\Rightarrow$ (5): За доказ ове импликације потребна нам је следећа лема.

Лема 4. *Ако је свака стабилна (нестабилна) многострукост густа у M, тада за свако $\varepsilon > 0$, постоји $R = R(\varepsilon)$ такво да је свака лопта полупречника R у свакој стабилној (нестабилној) многострукости ε-густа у M.*

Доказ Леме 4. Домаћи (Њ10). □

Претпоставимо да је свака нестабилна многострукост густа у M и да су $U, V \subseteq M$ отворени и непразни. Нека су $x, y \in M$ и $\delta > 0$ такви да је $W^u_\delta(x) \subseteq U$ и $B(y, \delta) \subseteq V$, и нека је $R = R(\delta)$ као у Леми 4. Пошто f шири нестабилну многострукост екпоненцијално, имамо да је за $n \geq N$, $f^n(W^u_\delta(x)) \supseteq W^u_R(f^n(x))$, па како је скуп $W^u_R(f^n(x))$ δ-густ, то постоји

$$z \in W^u_R(f^n(x)) \cap B(y, \delta) \subseteq W^u_R(f^n(x)) \cap V \subseteq f^n(W^u_\delta(x)) \cap V \subseteq f^n(U) \cap V,$$

за свако $n \geq N$.

(1) $\Rightarrow$ (3) се доказује исто.

(5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) је очигледно. □

Отворен проблем је да ли је $\mathrm{NW}(f) = M$ за сваки Аносовљев дифеоморфизам (хипотеза је да ово важи).

Литература.

[1] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.