9. Аксиома А и структурална стабилност

У претходним лекцијама смо видели да су Аносовљеви дифеоморфизми структурално стабилни. Овде ћемо показати да својство структуралне стабилности има и шира класа дифеоморфизма.

Дефиниција 1. Кажемо да дифеоморфизам $f : M \to M$ *задовољава Смејлову аксиому A* ако је скуп $\mathrm{NW}(f)$ хиперболички и ако је $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \mathrm{NW}(f)$. $\diamond$

Аносовљеви аутоморфизми, соленоид и Смејлова потковица су примери дифеоморфизама који задовољавају аксиому А.

Приметимо да из чињенице да је $\mathrm{NW}(f)$ хиперболички не следи да је $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \mathrm{NW}(f)$, наиме важи $\overline{\mathrm{Per}(f|_{\mathrm{NW}(f)})} = \mathrm{NW}(f|_{\mathrm{NW}(f)})$, али не мора бити $\mathrm{NW}(f)$ једнако $\mathrm{NW}(f|_{\mathrm{NW}(f)})$ (видети Задатак (О1)).

Дефинишимо релацију $\sim$ на скупу $\mathrm{NW}(f)$: $x \sim y$ ако

- $W^u(x) \cap W^s(y) \neq \emptyset$ и $W^s(x) \cap W^u(y) \neq \emptyset$;
- горњи пресеци су трансверзални барем у једној тачки.

Релација $\sim$ је релација еквиваленције (Домаћи (О2)).

Теорема 2. (Смејлова теорема о спектралној декомпозицији.) *Ако f зодовољава аксиому A, онда постоји јединствена партиција скупа* $\mathrm{NW}(f)$*:*

$$\mathrm{NW}(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_m,$$

и пермутација σ скупа $\{1, \ldots, m\}$ таква да су Λ_j затворени (и међусобно дисјунктни) и да је $f(\Lambda_j) = \Lambda_{\sigma(j)}$. Ако је $\sigma^k(j) = j$, тада је $f^k|_{\Lambda_j}$ тополошко миксирање.

Доказ. Дефинисаћемо скупове Λ_j као класе еквиваленције $\sim$. Они су по дефиницији дисјунктни скупови. Због компактности многострукости M и чињенице да су сваке две тачке на довољно малом растојању еквивалентне (Тврђење 3 из Лекције 7), то их има коначно много. Такође, они су затворени, јер ако $x \in \overline{\Lambda_j}$, онда је $x = \lim x_n$, $x_n \sim y$. То значи да су пресеци $W^u(x_n) \cap W^s(y)$ и $W^s(x_n) \cap W^s(x_n)$ непразни и трансвсрезални у барем једној тачки. Како је $x_n \in \mathrm{NW}(f)$, то је $x \in \mathrm{NW}(f)$. Због непрекидност дистрибуција W^u и W^s и чињенице да је трансверзалност отворено својство, имамо да је и $x \sim y$. Како је

$$x \sim y \quad \Rightarrow \quad f(x) \sim f(y),$$

важи и $f(\Lambda_j) = \Lambda_{\sigma(j)}$ за неку пермутацију σ скупа $\{1, \ldots, m\}$.

Остало је да докажемо део са миксирањем. Означимо са $g := f^k$. Приметимо да су стабилне и нестабилне многострукости за f и g исте, па се релација $\sim$ не разликује за скупове f и g (тј. $x \overset{f}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{g}{\sim} y$), као и да важи $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Per}(g)$, $\mathrm{NW}(f) = \mathrm{NW}(g)$, тако да аксиома А важи и за g.

Нека је тачка $q \in \Lambda_j$ периодична, и $p \in \Lambda_j$. Тада постоји z у ком се $W^u(p)$ и $W^s(q)$ секу трансверзално, па се било која многострукост која садржи q и трансверзална је на $W^s(q)$ приближава (итерацијама пресликавања g) многострукости $W^u(p)$ (ово следи из Ламдба леме).

Али како је тачка q периодична (и произвољна), закључујемо да је $W^u(p)$ густ у $\mathrm{Per}(g|_{\Lambda_j})$, па је густ и у Λ_j.

Нека су U и V непразни и отворени у Λ_j, треба да докажемо да постоји N такво да је $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$, за $n \geq N$. Како је скуп периодичних тачака густ, постоји $p \in U$ периодична. Пошто је U отворен, постоји $\delta > 0$ такво да је $W^u_\delta(p) \subseteq U$. Нека је l период тачке p. Пошто је $W^u(p) = \bigcup_{i=0}^{\infty} g^{li}(W^u_\delta(p))$ (Тврђење 7 из Лекције 5) густ, постоји m такво да је

$$V \cap \bigcup_{i=0}^{m} g^{li}(W^u_\delta(p)) \neq \emptyset.$$

Како је и $W^u(g^k(p)) = g^k(W^u(p))$ густ, постоји m_k такво да је

$$V \cap \bigcup_{i=0}^{m_k} g^{k+li}(W^u_\delta(p)) \neq \emptyset,$$

за свако k. Нека је

$$N = \max_{k \in \{1,\ldots,l-1\}} \{(l+1)m_k\}.$$

За свако $n \geq N$ имамо

$$\emptyset \neq V \cap \bigcup_{i=1}^{n} g^{i}(W^u_\delta(p)) = V \cap g^n(W^u_\delta(p)) \subseteq V \cap g^n(U).$$

□

Напомена 3. *На исти начин као Теорема* **??**, *доказује се следеће тврђење: ако је Λ локално максимални хиперболички скуп дифеоморфизма $f : U \to M$, онда постоји јединствена партиција скупа*

$$\mathrm{NW}(f_\Lambda) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_m,$$

и пермутација σ скупа $\{1,\ldots,m\}$ таква да су Λ_j затворени (и међусобно дисјунктни) и да је $f(\Lambda_j) = \Lambda_{\sigma(j)}$. Ако је $\sigma^k(j) = j$, тада је $f^k|_{\Lambda_j}$ тополошко миксирање. ◊

Последица 4. *Ако је f на локално максималном хиперболичком скупу Λ тополошко миксирање, онда периодичне тачке чине густ скуп у Λ и нестабилна многострукост сваке тачке јесте густа у Λ.*

Доказ. Спектрална декомпозиција је тривијална. □

Последица 5. *Рестрикиција дифеоморфизма f на локално максималан хиперболички скуп је тополошки транзитивно пресликање ако и само је пермутација σ из Теореме* **??** *циклична.*

Доказ. Домаћи (О3). □

Последица 6. *Нека је Λ повезан локално максималан хиперболички скуп за f такав да је $\Lambda = \mathrm{NW}(f|_\Lambda)$ (односно да су периодичне орбите густе у Λ). Тада је $f|_\Lambda$ тополошко миксирање.*

Доказ. Спектрална декомпозиција је тривијална. $\square$

Последица 7. *Нека је $f : M \to M$ Аносовљев дифеоморфизам компактне повезане многострукости. Тада из $\mathrm{NW}(f) = M$ следи да је f тополошко миксирање.* $\square$

Дефиниција 8. Нека f задовољава аксиому А. Кажемо да f задовољава *јак услов трансверзалности* ако је $W^u(x) \pitchfork W^s(y)$ (пресек $W^u(x)$ и $W^s(y)$ је трансверзалан у свакој тачки), за свако $x, y \in \mathrm{NW}(f)$. $\diamond$

Споменути резултат о структуралној стабилности наводимо без доказа.

Теорема 9. (Теорема о структуралној стаблиности.) *Дифеоморфизам класе C^1 је структурално стабилан ако и само ако задовољава јак услов трансверзалности.* $\square$