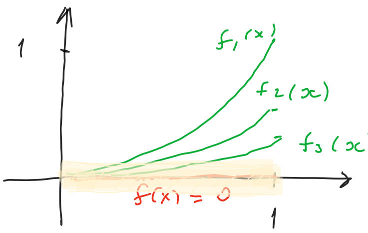
9. час

Tuesday, 30 November 2021 16:14

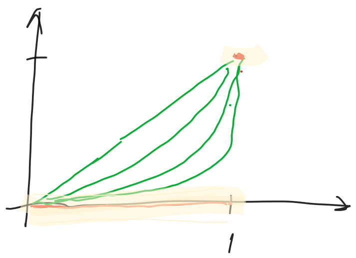
ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗОВИ И РЕДОВИ, РАВНОМЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА

$f_n(x): A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Примери. (1) $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$, $x \in [0,1]$



(2)



$f_n(x) = x^n$, на $[0,1]$

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x^2$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

деф. Кажемо да низ функција $f_n: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ равномерно (униформно) конвергира ка ф-ји f на скупу A ако $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

n_0 (зависи само од ε, не и од x)

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Кажемо и f_n конв. ка f равномерно по $x \in A$.

ознака $\boxed{f_n \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f}$ на A

У Примеру 1. $f(x) = 0$, $\forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - 0| < \varepsilon$

$0 - \varepsilon < f_n(x) < 0 + \varepsilon$

$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$

деф. Кажемо да низ ф-ја $f_n(x)$ конвергира обично (тачка-по-тачка) ка функцији f на скупу A ако $\forall x \in A$ фиксирано низ $\underbrace{f_n(x)}_{\in \mathbb{R}} \to \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}}$

у примерима 1. $f_n(x) = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 = f(x)$ ($\forall x$ фиксирано)

2. $f_n(x) = x^n \longrightarrow \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases} = f(x)$

Тврђење. $f_n \rightrightarrows f$ на $A \Rightarrow f_n \to f$ обично, тј. т.п.т.

Доказ. $\forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \forall x \in A\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

фикс. x, $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$, важи $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ □

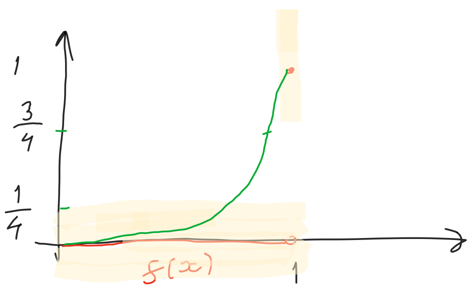
Примери. 1. $f_n(x) = \frac{x^2}{n} \rightrightarrows 0 = f(x)$, на $[0,1]$

јер $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^2}{n}\right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n \ge n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

јесте равномерна

2. $f_n(x) = x^n \xrightarrow{\text{т.п.т.}} f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases}$ али ова конв. није равномерна

јер $\varepsilon < 1/2$ (нпр. $\varepsilon = \frac{1}{4}$), да ли је $f_n(x) \in (f(x) - \frac{1}{4}, f(x) + \frac{1}{4})$
$\forall x \in [0,1]$
$\forall n \ge n_0$

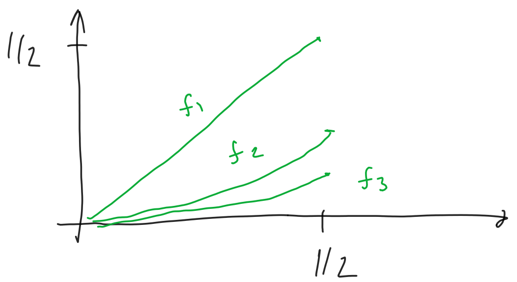


Ако $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow$ сви графици за $n \ge n_0$ леже у жељеном појасу, али то није тачно!

Јер су f_n непрекидне, и узимају све вредности од 0 до 1.

3. $f_n(x) = x^n$ на $[0, \frac{1}{2}]$

тачка-по-тачка $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$ за $x \in [0, \frac{1}{2}]$



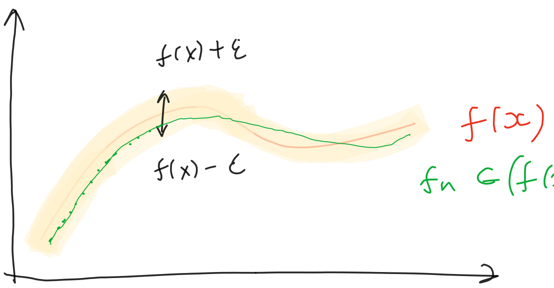
Овде важи $f_n \rightrightarrows f$ јер

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n \le \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$n \ge n_0$

НАРАВОУЧЕНИЈЕ из Примера 1. и 3. Исти низ ф-ја не конв. равномерно на једном скупу, али конв. равномерно на другом скупу. Појам равномерне конвергенције се састоји од f_n, f и скупа A.

Још једна слика



$f_n \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, $n \ge n_0$

Напомена. $f_n \rightrightarrows f$ на A ако

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \ge n_0 \ \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{R} \ni a_n := \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

У задацима: 1. нађемо $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

2. нађемо $a_n := \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$

3. $a_n \to 0 \iff f_n \rightrightarrows f$

У нешим примерима

1. $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$, $A = [0,1]$ $\quad f(x) = 0$

$$a_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^2}{n} - 0\right| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^2}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

$\Rightarrow$ конв. је равн.

2. $f_n(x) = x^n$, $\tilde{A} = [0,1)$, $\quad \tilde{f}(x) = 0$

$$a_n = \sup_{x\in[0,1)} |x^n - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$$

$$A = [0,1] \Rightarrow \sup_{x\in A} |x^n - f(x)| \geq \sup_{x\in\tilde{A}} |x^n - 0| = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

Не конв. равномерно!

3. $f_n(x) = x^n$ $\quad A = [0, 1/2]$ $\Rightarrow$ $f(x) = 0$

$$a_n = \sup_{[0,1/2]} |x^n - 0| = \frac{1}{2^n} \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$$ □

Задаци. Испитати равн. конв. $f_n(x)$ на A.

1. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ $\quad A = [0,1]$

тачк.
$$\lim_{n\to\infty} (x^n - x^{n+1}) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & x \in [0,1) \\ 1 - 1 = 0 & x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x$

$$a_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x)$$

За фикс. n, $f_n(x)$ су дифер. $\Rightarrow$ можемо наћи $\max\limits_{[0,1]} f_n(x)$

$$f_n'(x) = n x^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$$

$$f_n'(x) \begin{cases} > 0 & x \in [0, \frac{n}{n+1}) \\ = 0 & x = \frac{n}{n+1} \\ < 0 & x > \frac{n}{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n}_{\to e^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x$$

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e^{-1}}\right)^{\frac{n}{n+1}\,\to 1}$$

$$\Leftarrow \quad a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n} \longrightarrow e^{b \cdot \ln a} = e^{\ln a^b} = a^b$$

$0 < a_n \to a$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$
$\phantom{0 <}\ \ a > 0$

$$\Rightarrow \quad a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad f_n \rightrightarrows f \qquad \square$$

2. Домашно $\quad f_n(x) = x^n - x^{2n} \qquad A = [0,1]$

3. $f_n(x) = n(1 - \sqrt[n]{x}) \qquad A = [a,b] \subseteq (0,1)$

фикс $\quad x \in (0,1) \quad \lim_{n\to\infty} n(1 - \sqrt[n]{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{1/n}}{\frac{1}{n}} = -\ln x$

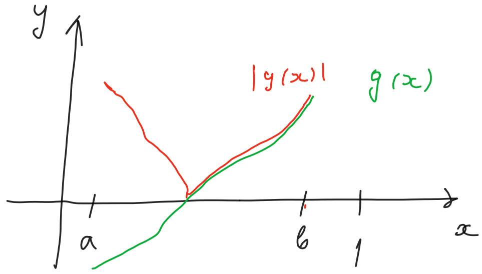
$$\lim_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a$$

$f(x) = -\ln x \qquad$ п. т. н.

равномерно? $\quad a_n := \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$

$$= \max_{[a,b]} |n(1 - \sqrt[n]{x}) + \ln x|$$

$g(x) = n(1-\sqrt[n]{x}) + \ln x$



$$g'(x) = n \cdot \frac{-1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} + \frac{1}{x} = -x^{1/n} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 - \underset{\overset{\wedge}{1}}{x^{1/n}}\right) > 0$$

$$\Rightarrow g \nearrow \Rightarrow \max |g(x)| = \max \{ |g(a)|, |g(b)| \}$$

$$a_n = \max\{|g(a)|, |g(b)|\} = \max\Big\{ |\underbrace{n(1-\sqrt[n]{a}) + \ln a}_{\downarrow\, n\to\infty \atop 0}|, |\underbrace{n(1-\sqrt[n]{b}) + \ln b}_{\downarrow\, n\to\infty \atop 0}| \Big\}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

// овде конкретно је g сталног знака: $g(x) \le 0 \iff \ln x \le n(\sqrt[n]{x}-1)$
$\iff \frac{1}{n} \ln x \le \sqrt[n]{x} - 1 \iff \ln x^{1/n} \le x^{1/n} - 1 \Leftarrow \ln t \le t - 1 \quad \forall t > 0$ //

$\square$

деф. $\sum f_n(x)$ равномерно конв. на A ако низ $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ равномерно конвергира A.

НАПОМЕНА. $\sum f_n(x)$ равн. конв. на $A \Rightarrow \sum f_n(x)$ конв. за $\forall x \in A$.

Тврђење. (Кошијев критеријум равномерне конвергенције)

$f_n(x)$ равномерно конв. на $A \subset \mathbb{R}$ ако и само ако важи

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0, \ \forall m,n \ge n_0 \ \forall x \in A \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Кошијев услов

$\downarrow$ зависи само од ε, не и од x

доказ. $\boxed{\Rightarrow:}$ $f_n \rightrightarrows f$ на A, $\varepsilon > 0$ дато, n_0 т.д.

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in A, \ n \ge n_0$

$\Rightarrow m,n \geq n_0: |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall x \in A$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ фикс. x, $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$, $\forall m,n \geq n_0$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $f_n(x)$ је Кошијев низ у $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f_n(x)$ конвергира, означимо лимес са $f(x)$.

Зашто је $f(x)$ равномерни лимес?

$\varepsilon > 0$ (по дефиницији)

$\varepsilon_1 < \varepsilon$ n_0, $\forall m,n \geq n_0$ $\forall x \in A$ $\underbrace{|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1}_{\lim\limits_{m\to\infty}}$ (Кошијев услов)

не зависи од x

$\Rightarrow \forall x \in A$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$

$\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ $\square$

Последица 1 $\sum f_n(x)$ равн. конв. на A $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, \quad \forall n,m \geq n_0, \quad \forall x \in A \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_n(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказ. Применимо Кошијев крит. на $S_n(x)$ $\square$

Последица 2. Ако $\sum f_n(x)$ равн. конв. на A $\Rightarrow$

$f_n(x) \rightrightarrows 0$ на A.

Доказ. из Посл. 1. $\Rightarrow$ $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall m,n \geq n_0$ $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon$ $\forall x \in A$

$m := n-1$ $\quad \left|\sum\limits_{k=n}^{n} f_k(x)\right| = \underbrace{|f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \ \forall x \in A}$

$\Updownarrow$

$f_n \rightrightarrows 0$ на A $\square$

Теорема (Вајерштрасов тест). Нека је $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in A$.
Ако ред $\sum a_n$ конвергира $\Rightarrow \sum f_n(x)$ равн. конв. на A.

Доказ. из Последице 1.

Кошијев к. за обичне $\sum$

$\varepsilon > 0$ дато, $\sum a_n$ конв. $\Rightarrow$ $\exists n_0 \; \forall m,n \geq n_0$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

али $\forall x \in A \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$

$\overset{\text{Последица 1}}{\Longrightarrow} \sum f_n(x)$ равномерно конв. $\square$

Задаци: Испитати обичну и равномерну конв. следећих редова

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ на $(0,\infty)$

обична? да, јер $\displaystyle\frac{1}{[(n-1)x+1](nx+1)} \sim \frac{1}{n^2x^2}$, $n \to \infty$

$\displaystyle\sum \frac{1}{n^2x^2}$ конв. $\forall x$

равномерна? $\displaystyle f_n(x) = \frac{1}{[(n-1)x+1](nx+1)} \overset{?}{\rightrightarrows} 0 \quad (n \to \infty)$

$$\underbrace{a_n := \sup_{(0,\infty)} |f_n(x)|, \quad a_n \overset{?}{\to} 0 \quad (n \to \infty)}_{\text{довољно}}$$

$$\sup |f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}+1\right)\left(n\frac{1}{n}+1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}+1\right)\cdot 2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow f_n \not\rightrightarrows 0 \Rightarrow$ не конв. равномерно

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ $x \in \mathbb{R}$, $\frac{nx}{1+n^5x^2} \sim \frac{1}{n^4x}$, $x \neq 0$

$\Rightarrow$ конв.

$x = 0 \Rightarrow \sum 0$, конв.

$\Rightarrow$ обично конв. за $\forall x \in \mathbb{R}$

$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$, фикс. n, пронмамо $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \geq 0} f_n(x)$

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^5x^2) - nx \cdot 2 \cdot n^5 x}{(1+n^5x^2)^2} = \frac{n + n^6x^2 - 2n^6x^2}{(1+n^5x^2)^2} =$$

$$= \frac{n(1-n^5x^2)}{(1+n^5x^2)}$$

$f_n' > 0 \iff 1 - n^5x^2 > 0 \iff x^2 < \frac{1}{n^5} \iff x \in [0, \frac{1}{n^{5/2}}]$

$f_n' = 0 \iff x = \frac{1}{n^{5/2}}$

$f_n' < 0 \iff x > \frac{1}{n^{5/2}}$

$$\Rightarrow \max_{[0,\infty)} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) = \frac{n \frac{1}{n^{5/2}}}{1 + n^5 \frac{1}{n^5}} = \frac{1}{2n^{3/2}} \to 0$$

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$

$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^{3/2}}$, $\sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ конв. $(3/2 > 1) \Rightarrow \sum f_n(x)$ равн. конвергира

3. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ $x \in (0, +\infty)$

обична. $x > 0$ фиксирам $2^n \sin \frac{1}{3^n x} \overset{n\to\infty}{\sim} 2^n \frac{1}{3^n x} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{x}$ конв. $\Rightarrow \sum 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ конв. $\forall x$

равномерна. $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$

$$\sup |f_n(x)| \geq |f_n(1/3^n)| = \left|2^n \sin \frac{1}{3^n \cdot \frac{1}{3^n}}\right| = 2^n \sin 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

$\Rightarrow$ не конв. равномерно.

ФУНКЦИОНАЛНА СВОЈСТВА ГРАНИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

f_n – неке особине $\overset{?}{\Rightarrow}$ f има ту особину

Т (непрекидност граничне функције).

f_n непр. у $x_0 \in A$, $f_n \rightrightarrows f$ на A $\Rightarrow$ f је непрекидно у x_0.

Доказ. Хоћемо: $\varepsilon > 0$ дато $?\,\delta$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{(2)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{(3)}$$

(1) и (3) $\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3 \quad \forall x \in A \quad (f_n \rightrightarrows f)$

(2) фиксирамо $n \geq n_0$ (нпр. $n = n_0$), f_n непр. $\exists \delta = \delta(x_0, n)$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/2$$

за овакво x, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ $\square$

Пример. $f_n(x)=x^n$, $A=[0,1]$ f_n су непрекидне

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$ је прекидна

$$\Rightarrow \quad f_n \not\rightrightarrows f$$ □

На исти начин се доказује следеће тврђење

Тврђење. $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на A, x_0 тачка нагомилавања A.
Нека постоје $a_n := \lim_{x\to x_0} f_n(x)\in\mathbb{R}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a\in\mathbb{R}$.
Тада $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=a$.

Доказ. Домаћи $\Big(\underbrace{|f(x)-a| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-a_n| + |a_n-a|}\Big)$

УПУТСТВО, ГЛЕДАТИ ДОКАЗ НЕПРЕКИДНОСТИ

Шта каже Тврђење:

ПП. $a=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\|$

ВРБ. $a=\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

два лимеса комутирају ако један постоји а други је равномеран.

Пример. $f_n(x)=x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1^-} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1^-} x^n=\lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\neq$$

$$\lim_{x\to 1^-}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{x\to 1^-}\lim_{n\to\infty} x^n=\lim_{x\to 1^-} 0 = 0$$ □