8 час

Tuesday, 23 November 2021 16:17

ред $\sum a_n$, a_n – општи члан реда, $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ парцијалне суме

Тврђење. Општи члан конвергентног реда тежи нули.

Доказ. $\sum a_n$ конв. $\Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} S_{N-1} = S \in \mathbb{R}$

$$S_N - S_{N-1} = a_N \quad / \lim_{N\to\infty}$$

$$0 = S - S = \lim_{N\to\infty} a_N \qquad \square$$

Напомена: Ово није и довољан услов. Нпр. $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ (прошли час) дивергира, а $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln 1 = 0$ $\square$

Тврђење. (Кошијев критеријум конв. редова)

$\sum a_n$ конв. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \forall M, N \geq N_0 \ \left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n\right| < \varepsilon$.

Доказ. $|S_N - S_M| = \left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n\right|$, ред конв. $\overset{деф.}{\Leftrightarrow}$ S_N конв. $\square$

Примери. 1. $\sum \frac{1}{n}$ дивергира, 2. $\sum \frac{1}{n^2}$ конвергира помоћу Кошијевог критеријума.

(ВАЖНО)

1. $S_{2n} - S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$

$$= \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Не важи Кошијев крит. јер $\varepsilon = \frac{1}{3}$ $(< \frac{1}{2})$, N_0 – штогод

$n, 2n \geq N_0$

$|S_{2n} - S_n| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ дивергира.

Хармонијски ред $\sum \frac{1}{n}$

2. $|S_n - S_m| \underset{n>m}{=} S_n - S_m = 1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2} - \left(1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{m^2}\right) =$

$$= \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \dots + \frac{1}{n^2} <$$

$k^2 > k(k-1)$ $< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} =$

$$= \frac{m+1-m}{m(m+1)} + \frac{m+2-(m+1)}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{m} - \cancel{\frac{1}{m+1}} + \cancel{\frac{1}{m+1}} - \cancel{\frac{1}{m+2}} + \cancel{\dots} \cancel{+} \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \varepsilon \quad \forall m,n \geq n_0$$

$\varepsilon > 0$ дато, $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, $m,n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ $\square$

$\sum \frac{1}{n^2}$ хипер хармонијски ред

РЕДОВИ СА ПОЗИТИВНИМ ОПШТИМ ЧЛАНОМ

$\boxed{a_n \geq 0}$ $\Leftrightarrow$ S_n расте, $S_n - S_{n-1} = a_n$

ПРЕТПОСТАВЉАМО НАДАЉЕ

$\sum a_n$ конвергира $\Leftrightarrow$ S_n ограничен одозго

Тврђење (I поредбени тест). Нека је $0 \leq a_n \leq b_n$.
Тада
1) $\sum b_n$ конв. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ конв.
2) $\sum a_n$ дивергира $\Rightarrow$ $\sum b_n$ дивергира.

доказ. 1) $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$, $T_n := \sum_{j=1}^{n} b_j$, $S_n \leq T_n$

$\sum b_n$ конв. $\Leftrightarrow$ T_n огр. одозго $\Rightarrow$ S_n огр. одозго $\Rightarrow$ $\sum a_n$ конв. $\square$

Тврђење (II поредбени тест.), $a_n, b_n \geq 0$ и $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$

$(a_n = b_n + o(b_n), n \to \infty$, $b_n \neq 0$ $\frac{a_n}{b_n} \to 1)$

Тада $\sum a_n$ конвергира $\iff$ $\sum b_n$ конвергира.

Доказ. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \implies \exists n_0,\ n \geq n_0 \quad \frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2$

тј. $\frac{b_n}{2} \leq a_n \leq 2 b_n$

из I поредбеног теста. $\square$

Пример. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ конв. за $\alpha \geq 2$, див. за $\alpha \leq 1$ $\qquad \alpha \in (1,2)$? касније

јер, $\alpha \geq 2 \implies \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ конв. I поредб. тест

а, за, $\alpha \leq 1 \implies \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$ дивергира. —||— $\square$

Задаци. 1) $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n+\sin n}$, $\quad n+\sin n > 0$, $\quad \frac{1}{n+\sin n} \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$

јер $\frac{\frac{1}{n+\sin n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+\sin n} = \frac{1}{1+\frac{\sin n}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $\quad \frac{\sin n}{n} \to 0$

$\implies$ дивергира јер $\sum \frac{1}{n}$ дивергира.

2) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n+4}{n^2+2n}$ $\qquad \frac{n+4}{n^2+2n} \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$

$$\frac{\frac{n+4}{n^2+2n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2+4n}{n^2+2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\implies$ дивергира

3) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\sin n + 2n}{n^3+2n^2+4}$, $\quad \frac{\sin n + 2n}{n^3+2n^2+4} \sim \frac{2}{n^2}$, $n \to \infty$

$\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2}{n^2}$ конв. $\implies$ конв. и

4) Ако конв. ред $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{R}^+$, да ли a_n обавезно конв. и ред

а) $\sum \sin a_n$ $\qquad$ б) $\sum (e^{a_n}-1)$ $\qquad$ в) $\sum a_n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$?

а) да, јер је $\sin a_n \leq a_n$, $\quad \sin a_n \geq 0$ $(n \geq n_0)$

I пор. тест $\quad a_n \to 0,\ n\to\infty$
$n \geq n_0,\ a_n \in [0,\pi]$
$\Rightarrow \sin a_n \geq 0$

II НАЧИН $\quad \sin a_n \sim a_n,\ a_n \to 0$ ($a_n \to 0$ јер $\sum a_n$ конв.)

НАПОМЕНА. I пор. тест важи и ако су $a_n, b_n \geq 0$ за $n \geq n_0$
и $a_n \leq b_n,\ n \geq n_0$
$\boxed{\text{(НЕ МОРА ОД ПРВОГ ЧЛАНА)}}$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0}^{N} a_n, \quad S_N \text{ конв.} \Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{N} a_n \text{ конв.}$$

Не утиче
Не ∃ лимеса

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{a_n} - 1)$ $\quad a_n \to 0,\ n \to \infty$ ($\sum a_n$ конв.)

$e^{a_n} - 1 \sim a_n,\ n \to \infty$, јер $\dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \to 0} 1$

$\Rightarrow$ конв. јер $\sum a_n$ конв. (II поређење)

в) $\sum a_n^{\alpha}$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \geq 1 \Rightarrow a_n \geq a_n^{\alpha}$, $n \geq n_0$

$\Rightarrow \sum a_n^{\alpha}$ сигурно конв. за $\alpha \geq 1$

за $\alpha < 1$ не мора да знач, $\sum \frac{1}{n^2}$ конв.

$\alpha = 1/2$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\alpha} = \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n}$ див.

(ово није крај задатка).

Кошијев и Даламберов тест

Тврђење (Кошијев тест). Нека је $a_n \geq 0$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = L$

1) Ако је $L > 1$ (или $L = \infty$) $\Rightarrow \sum a_n$ дивергира.

2) Ако је $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ конвергира

3) Ако је $L = 1$ тест је немоћан.

Доказ. $q \geq 0 \Rightarrow \sum q^n$ конв. $\Leftrightarrow q < 1$.

1) $L > 1 \Rightarrow \exists\, q \in (1, L)$

$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = L \Rightarrow \exists$ подниз a_{n_k}, $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \xrightarrow{k\to\infty} L$

$\exists k_0 \ \forall k \geq k_0 \quad \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq q$

$\Rightarrow a_{n_k} \geq q^{n_k}, \quad q > 1$

$\Rightarrow a_n \not\to 0, \quad n \to \infty$

$(a_{n_k} \to \infty)$

$\Rightarrow \sum a_n$ дивергира.

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = L < 1 \qquad \exists\, q \in (L, 1)$

$\Rightarrow \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq q^n$, $\sum q^n$ конв. $\Rightarrow \sum a_n$ конв.
(I пор. крит.)

3) $\sum \frac{1}{n}, \ \sum \frac{1}{n^2}$

$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$, $\sum \frac{1}{n}$ дивергира

$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{1^2} = 1$, $\sum \frac{1}{n^2}$ конвергира

} два одговор. $\square$

Тврђење (Даламберов тест). $a_n > 0 \quad (n \geq n_0)$

$l = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1) $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ дивергира
2) $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ конв.
3) $L = l = 1 \Rightarrow$ тест је немоћан.

Доказ. 1) $l > 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

$\Rightarrow \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$

$\Rightarrow$ $n \geq n_0$ низ a_n расте! $a_{n+1} \geq q a_n > a_n > a_{n_0} > 0$

$\Rightarrow$ $a_n \not\to 0$, $n \to \infty$

2) $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$

$\Rightarrow$ $\exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq q \\ \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leq q \\ \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \leq q \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq q \end{array}\right\} \text{помножимо}$$

$$\frac{a_{\cancel{n_0+1}}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{\cancel{n_0+2}}}{a_{\cancel{n_0+1}}} \cdot \frac{a_{\cancel{n_0+3}}}{a_{\cancel{n_0+2}}} \cdots \frac{a_{\cancel{n-1}}}{a_{\cancel{n-2}}} \cdot \frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}} \leq \overbrace{q \cdot q \cdots q}^{n-n_0}$$

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} \leq q^{n-n_0} \Rightarrow a_n \leq \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \cdot q^n = c \cdot q^n$$

$\sum c q^n$ конв. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ конв.

3) $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \sum \frac{1}{n} \text{ див.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1, \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ конв.} \qquad \square$$

Задаци. 1. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 2. $\sum \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ 3. $\sum \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

1. Даламбер $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)!} =$

$$= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{конв.}$$

2. Коши $\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^{n+1} =$

$$= \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow e^{-2} < 1 \Rightarrow \text{конв.}$$

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^x\right)$$

3. $\sum \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$, Коши $\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ конвергира.

ИНТЕГРАЛНИ ТЕСТ

Тврдење $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, непрекидна, опаѓачка.

Тогаш $\int_1^\infty f(x)\,dx$ конв. $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ конвергира.

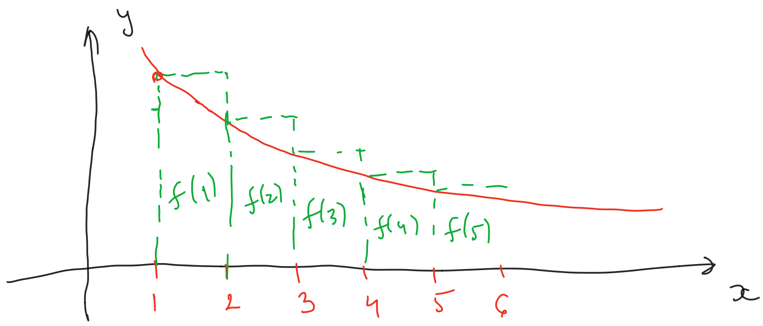
Последица. $\alpha \in (1,2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ непр. и опаѓа

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конв. $\Leftrightarrow$ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ конв. $\Leftrightarrow$ $-\alpha < -1$
$\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

$$\left(\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^\infty = 0 + \frac{1}{\alpha-1}\right)$$

ЗАКЛУЧАК. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ конв. $\Leftrightarrow$ $\alpha = 1$ $\square$

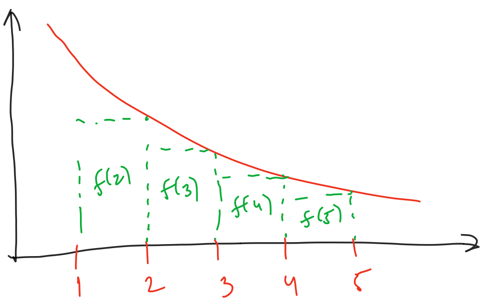
Доказ тврђења.



P испод графика је интеграл

$\wedge$

P правоугаоника је $\sum f(n)$



$$\sum_{2}^{\infty} f(n) \leq \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

$\int_1^\infty f(x)\,dx$ конв. $\Leftrightarrow$ $F(R)=\int_1^R f(x)\,dx$ ограничена (јер је F растућа)

$\Leftrightarrow$ $F(N)=\int_1^N f(x)\,dx$ ограничена $N\in\mathbb{N}$

$$\int_1^N f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1} f(n)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

$\Downarrow$

$\sum$ конв. $\Rightarrow$ $\int$ конв.

$$\int_1^N f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) = \sum_{n=2}^{N} f(n)$$

$\Downarrow$

$\int$ конв. $\Rightarrow$ $\sum$ конв.

$\square$

Пример. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$, $p>0, q>0$ конв. $\Leftrightarrow$ $\int_2^\infty \frac{dx}{x^p(\ln x)^q}$ $\Leftrightarrow$ $p>1$ или $p=1,\ q>1$.

РЕДОВИ СА ПРОИЗВОЉНИМ ОПШТИМ ЧЛАНОМ
АПСОЛУТНА КОНВЕРГЕНЦИЈА РЕДОВА

деф. Кажемо да ред $\sum a_n$ апсолутно конвергира
ако конв. ред $\sum |a_n|$.

Терминологија. $\sum a_n$ конв, кажемо и да конв. обично или условно.
(не апсолутно).

Тврђење. Ако ред $\sum a_n$ конв. апсолутно $\Rightarrow$ $\sum a_n$ конв. и обично.

Доказ. Кошијев критеријум конв.

$\varepsilon > 0$ дато, хоћемо n_0, $\forall n, m \geq n_0$ $\left|\sum_{j=m+1}^{n} a_j\right| < \varepsilon$?

Знамо да $\exists n_0$, $\forall n, m \geq n_0$ $\left|\sum_{j=m+1}^{n} |a_n|\right| < \varepsilon$ јер $\sum |a_n|$ конв.

Неједн. троугла $\left|\sum_{j=m+1}^{n} a_n\right| \leq \sum_{j=m+1}^{n} |a_n| < \varepsilon$ $\square$

Тврђење (Лајбницов тест) $a_n \geq 0$, $a_n \searrow 0$ (може и $a_n \searrow 0, n \geq n_0$)

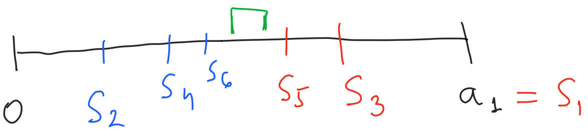
Тада $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ конвергира.

Терминологија. $\sum (-1)^{n+1} a_n$ се зове алтернирајући ред.

Доказ.

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 - a_2$
$S_3 = a_1 - a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$

не може, „рупа → тачки"



Доказаћемо да низови S_{2n} и S_{2n+1} конвергирају,
тј. да су монотони и огр.

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_1 - a_2 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$$
$$- (a_1 - a_2 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}) = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$$

$\Rightarrow S_{2n} \nearrow$

$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad S_{2n+1} \searrow$

и још је $\quad S_{2n} \leq S_{2n+1}$

$$\underbrace{S_2 \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq S_1}_{\text{ограниченост.}}$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$ и $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = T$

Зашто је $S = T$?

$T - S = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0 \Rightarrow S = T$ $\square$

Задаци. 1. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ конв. обично, али не и апсолутно

Лајбниц $\qquad\qquad$ $\sum \frac{1}{n}$ див.

$\frac{1}{n} \searrow 0$

2. За које α, $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ конв. условно, а за које апсолутно?

Када $\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ тежи нули? $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{n^\alpha}$ тежи нули $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$

Тј. за $\alpha \leq 0$, ред дивергира и условно, јер a_n не тежи нули

$\alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \searrow 0 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ конв. по Лајбницу

апсолутна: $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ конв. $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

Одговор. условно $\Leftrightarrow \alpha > 0$
апсолутно $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

3. обична и условна $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n + 1}$

$\sum (-1)^{n+1} \cdot a_n$, $\quad a_n = \frac{1}{\ln n + 1} \searrow 0 \quad \Rightarrow$ конв. по Лајбницу

апсолутно $\quad \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n + 1} \right| = \frac{1}{\ln n + 1} \geq \frac{1}{n}$, $n \geq n_0$

јер $\quad \frac{\frac{1}{\ln n + 1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\ln n + 1} \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

$\Rightarrow$ апсол. не конв.

(II начин $\quad \frac{1}{\ln n + 1} \sim \frac{1}{\ln n}$, $\quad \sum \frac{1}{n^p \ln n^q}$ конв. $\Leftrightarrow$ $p > 1$ или $p = 1$ и $q > 1$

код нас је $p = 0 \Rightarrow$ див.)

4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln \ln n}$ условно? , $\quad a_n = \frac{1}{\ln \ln n} \searrow 0$ конв. по Лајбницу

апсолутно? $\quad \frac{1}{\ln \ln n} \geq \frac{1}{n}$, $n \geq n_0 \Rightarrow$ див.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ дивергира јер општи члан не тежи нули.

6. Да ли конвергира низ $\quad x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$

Сваки низ у $\mathbb{R}$ можемо да видимо као ред

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)$$

дефин. $\quad x_0 := 0$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum a_k, \quad a_k := x_k - x_{k-1}$$

$$x_k - x_{k-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{k} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k-1}} - 2\sqrt{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} - 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \cdot \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - 2 \frac{k - (k-1)}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1} - 2\sqrt{k}}{\sqrt{k}\,(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} = \frac{\sqrt{k-1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\,(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} \cdot \frac{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$$

$$= \frac{k-1-k}{\sqrt{k}\,(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})^2} = \frac{-1}{\sqrt{k}\,(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})^2} \sim \frac{-1}{k^{3/2}}, \quad k \to \infty$$

$$3/2 > 1$$

$\Rightarrow$ конв.