6. час

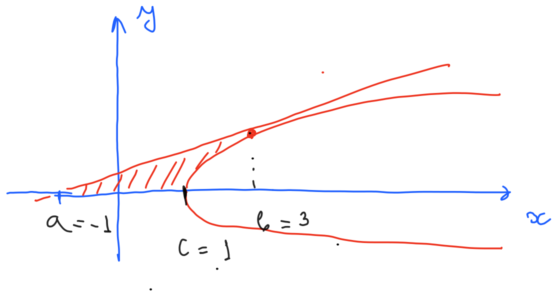
Tuesday, 9 November 2021 16:20

V око x-осе $\quad \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

y-осе $\quad 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$

Задаци.

1. $P(3,2)$ на $y^2=2(x-1)$ конструисати тангенту t.
Наћи V тела које се добија када фигура огр. са t, параболом и x-осом ротира око x-осе.

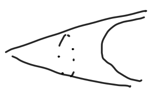


тангента: $y=\sqrt{2(x-1)} \ni P(3,2)$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2(x-1)}}$$

$$k = y'(3) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}} = \frac{1}{2}$$

$t:\ y-2=\frac{1}{2}(x-3) \qquad y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}(x+1)$



$V = V_1 - V_2$

V_1 → ротира дуж

V_2 → ротира део параболе

$$V_1 = \pi\int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{3}(x+1)^2\,dx = \frac{\pi}{4}\,\frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{3} =$$

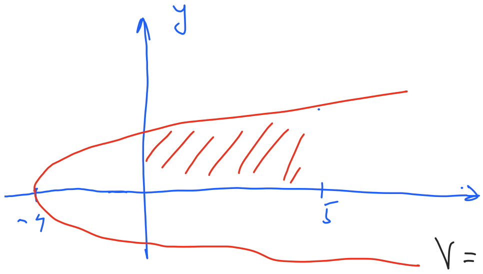
$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{3}\,(64-0) = \frac{16\pi}{3}$$

$$V_2 = \pi\int_1^3 2(x-1)\,dx = 2\pi\,\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_1^3 = \frac{2\pi}{2}(4-0) = 4\pi$$

$$V = \pi\left(\frac{16}{3}-4\right) = \frac{4\pi}{3}$$

2. V тела које настаје рот. око y осе дела параболе $p: y^2=4+x$ од $x=0$ до $x=5$.

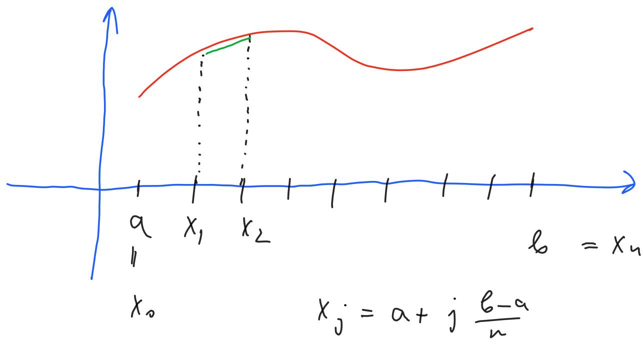
$$V = 2\pi\int_0^5 x\sqrt{4+x}\,dx$$



$$= \left\{ \begin{array}{l} t = 4 + x \\ x = t - 4 \\ dx = dt \end{array} \right\}$$

$$V = 2\pi \int_4^9 (t-4)\sqrt{t}\, dt = 2\pi \left[\int_4^9 t^{3/2}\, dt - 4 \int_4^9 \sqrt{t}\, dt \right] = \dots$$

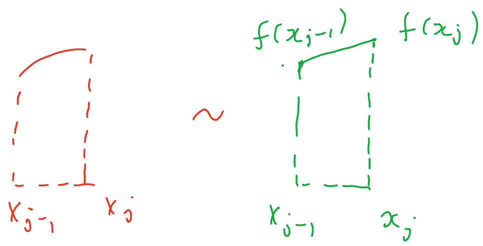
IV Површина обртног тела



$f(x) \geq 0$ на $[a,b]$

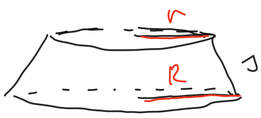
f класе C^1

$$x_j = a + j\,\frac{b-a}{n}$$



Зарубљене купа

P(омотача зар. купе) $= \pi(R+r)s$



На $[x_{j-1}, x_j]$, $s = |A_{j-1}A_j|$ $\quad A_j(x_j, f(x_j))$

$r = f(x_{j-1})$

$R = f(x_j)$

$$P_j = \pi\left(f(x_{j-1}) + f(x_j)\right)\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$$

(слично као код дужине лука)

$$= \pi \left(f(x_{j-1}) + f(x_j)\right)(x_j - x_{j-1})\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2}$$

$$= 2\pi\, f(\xi_j)\, \frac{b-a}{n} \sqrt{1 + f'(\eta_j)^2}$$

Лагр. т. о ср. вр.

$\frac{1}{2}\left(f(x_{j-1}) + f(x_j)\right)$ је између $f(x_{j-1})$ и $f(x_j)$

$\Rightarrow$ (Коши Болцано) $\exists \xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ т.д.

$$f(\xi_j) = \frac{1}{2}\left(f(x_{j-1}) + f(x_j)\right)$$

$$\sum P_j = 2\pi \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\sqrt{1 + f'(\eta_j)^2} \approx 2\pi\, S_n\left(f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\right)$$

$$\xi_j, \eta_j \in [x_{j-1}, x_j]$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx}$$

Задатак: Наћи P површи добијене ротацијом $y = \frac{x^3}{9}$, $0 \le x \le 2$ око x-осе.

$$y' = \frac{x^2}{3}, \quad P = 2\pi \int_0^2 \frac{x^3}{9}\sqrt{1 + \frac{x^4}{9}}\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{27}\int_0^2 x^3\sqrt{9 + x^4}\,dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = 9 + x^4 \\ dt = 4x^3\,dx \\ x^3\,dx = \frac{1}{4}\,dt \end{array} \right\} = \frac{2\pi}{108}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt = \dots$$

НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ

До сад $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (Риманов интегр.), ограничене

Сад $f: [a, \beta) \to \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ т.д. $\int_a^b f(x)\,dx$ постоји

за $\forall\, b \in [a, \beta)$

деф. Нека је f интегр. на $[a, b]$, $\forall b \in [a, \beta)$

Ако $\exists \lim\limits_{b \to \beta^-} \int_a^b f(x)\,dx \boxed{\in \mathbb{R}}$, онда се он зове несвојствени

КОНАЧАН!

интеграл ф-је f на $[a, \beta)$

и пише $\int_a^\beta f(x)\,dx$.

Кажемо да је β сингуларитет. Кажемо да $\int_a^\beta f(x)\,dx$ конвергира.

Ако не $\exists \lim\limits_{b \to \beta^-} \int_a^b f(x)\,dx$ кажемо да несв. инт. дивергира.

Пример. $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ конв?

Несвојствен је јер је граница ∞

$\int_1^b x^\alpha\,dx = \dots$ да ли $\exists \lim\limits_{b \to \infty}$

$\alpha \neq -1$: $\int_1^b x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_1^b = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}\left(b^{\alpha+1} - 1\right)$

Када $\exists \lim\limits_{b \to \infty} b^{\alpha+1}$? одг. $\iff \alpha + 1 \leq 0$
$\iff \alpha \leq -1$

$\alpha = -1$: $\int_1^b x^\alpha\,dx = \int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln 1 = \ln b \xrightarrow{b \to +\infty} \infty$

дивергира

ЗАКЉУЧАК: $\boxed{\int_1^\infty x^\alpha\,dx \text{ конвергира } \iff \alpha < -1}$ $\square$

деф.

Исто деф. несвојств. интеграл $f: (\alpha, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

ако $\exists \int_a^b f(x)\,dx$ $\forall a \in (\alpha, b]$, као $\lim\limits_{a \to \alpha^+} \int_a^b f(x)\,dx$

α је сингуларитет

ако $\exists \lim$ $\rightsquigarrow$ $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ конвергира

ако не $\rightsquigarrow$ $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ дивергира.

Пример. $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ несв. ако је $\alpha < 0$

$\exists$?

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^\alpha\,dx$

$\alpha \neq -1$: $\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{\alpha+1}\left(1 - \varepsilon^{\alpha+1}\right)$

Када $\exists \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+}$?

$\Leftrightarrow$

$\alpha + 1 \geq 0$, тј. $\alpha \geq -1$

код нас $\alpha > -1$

$\alpha = -1$: $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \ln 1 - \ln\varepsilon = 0 - \ln\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} +\infty$ дивергира

ЗАКЉУЧАК: $\boxed{\int_0^1 x^\alpha\,dx \text{ конв.} \Leftrightarrow \alpha > -1}$

Задаци. Израчунати несв. интеграле ако конв.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{z\to\infty} \int_0^z \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{z\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^z =$

$\displaystyle= \lim_{z\to\infty} (\operatorname{arctg} z - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-x}\,dx = \lim_{z\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^z =$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \left(-e^{-\beta}+1\right) = \lim_{\beta\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^{\beta}}\right) = 1-0 = 1$$

3. $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx$$

$$\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u=\ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix}\right\} = x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx =$$

$$= 1\ln 1 - \varepsilon\ln\varepsilon - (1-\varepsilon)$$

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\underbrace{\varepsilon\ln\varepsilon}_{\downarrow\, 0} - 1+\varepsilon\right) = -1$$

$$\left(\frac{(\ln\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -\varepsilon \to 0\right)$$ Лопитал

домаћи. 4. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$$

5. $$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

6. $$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx \qquad a>0$$

7. $$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$$ сингуларитет $x=1$

$\alpha>1$: $$\int_\alpha^2 \frac{dx}{x\ln x} = \left\{ \begin{matrix} t=\ln x \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix}\right\} = \int_{\ln\alpha}^{\ln 2}\frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{\ln\alpha}^{\ln 2} =$$

$$= \ln\ln 2 - \ln\ln\alpha$$

$$\lim_{\alpha\to1^+}(\ln\ln 2 - \ln\ln\alpha) = \ln\ln 2 - \overbrace{\lim_{\alpha\to 1^+} \ln \underbrace{\ln\alpha}_{\to 0^+}}^{-\infty} = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$$ дивергира.

деф. $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ $\qquad \alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $\beta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

f је интеграбилна на сваком $[a,b]\subseteq(\alpha,\beta)$

Кажемо да $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ конвергира ако конв. $\int_\alpha^c f(x)\,dx$ и $\int_c^\beta f(x)\,dx$

За било који $c \in (\alpha, \beta)$.

Напомена: дефиниција не зависи од c, јер $a, c, d \in (\alpha, \beta)$

$$\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$

$$\lim_{a\to\alpha+} \underbrace{\int_a^d f(x)\,dx}_{\varphi(a) = \psi(a) + \text{const}} \text{ постоји } \iff \lim_{a\to\alpha+} \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\psi(a)}$$

Пример. $\int_0^\infty x^\alpha\,dx$ сингуларитети $x = 0$ $(\alpha < 0)$, $x = \infty$

интеграл $\int_0^\infty x^\alpha\,dx$ конв. $\iff$ $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ конв. и $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$

$\iff$ $\alpha > -1$ и $\alpha < -1$

тј. $\int_0^\infty x^\alpha\,dx$ дивергира за $\forall \alpha$.

Задатак. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ конв. јер конв. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$

и $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$ □

деф. $f : [a,b] \setminus \{\gamma\} \to \mathbb{R}$ интегр. на сваком $[a_1, b_1] \subset [a,b]\setminus\{\gamma\}$

Кажемо да $\int_a^b f(x)\,dx$ конв. ако конв. $\int_a^\gamma f(x)\,dx$ и $\int_\gamma^b f(x)\,dx$

γ – сингуларитет. (Слично за $[a,b]\setminus\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$, $\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} f(x)\,dx$)

$f : [a,\beta) \setminus \{\gamma\} \to \mathbb{R}$ интегр. на $\forall$ сегменту, $\int_a^\beta f(x)\,dx$ конв.

ако конв. $\int_a^\gamma f(x)\,dx$ и $\int_\gamma^\beta f(x)\,dx$.

Задачи. Да ли су конв. и ако да, израчунати интеграле.

1. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ 2. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

1. конв. $\iff$ $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}$ и $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}$ конв.

$x=0$ је синг.

$$\| $$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\ln|x|\Big|_{-1}^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\left(\ln|\varepsilon| - \ln 1\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon = -\infty$$

$\Rightarrow$ $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}$ дивергира $\Rightarrow$ $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ дивергира.

2. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}$, $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}$, $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\left[-2\sqrt{-x}\right]_{-1}^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\left(-2\sqrt{-\varepsilon} + 2\sqrt{1}\right) = 2 \quad \text{конв.}$$

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1} = 2 \text{ конв.} \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} \text{ конв. и } = 4$$

$\square$

СВОЈСТВА НЕСВОЈСТЕНОГ $\int$

1. из $\int_a^b(\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \mu\int_a^b g(x)\,dx \;\Big|\; \lim_{b\to\beta^-}$

ако конв. $\int_a^\beta f\,dx$ и $\int_a^\beta g(x)\,dx$ $\Rightarrow$ конв. $\int_a^\beta(\lambda f + \mu g)\,dx$ и

важи $\int_a^\beta(\lambda f + \mu g)\,dx = \lambda\int_a^\beta f\,dx + \mu\int_a^\beta g\,dx$ линеарност

2. $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx \qquad a \le c \le b < \beta$

не утиче на $\lim_{b\to\beta^-}$ $\qquad / \lim_{b\to\beta^-}$

$\int_a^\beta f\,dx$ конв. $\Leftrightarrow$ $\int_c^\beta f\,dx$ конв.

и важи $\int_a^\beta f\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx$ адитивност по скупу

3. $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

претп. да $\exists \lim_{b\to\beta^-} u(b)v(b)$

Тада $\int_a^\beta u\,dv$ конв. $\Leftrightarrow$ $\int_a^\beta v\,du$ конв. и важи

$\int_a^\beta u\,dv = uv\Big|_a^\beta - \int_a^\beta v\,du \quad , \quad uv\Big|_a^\beta = \lim_{b\to\beta^-} u(b)v(b) - u(a)v(a)$

парцијално

4. $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \qquad \varphi : [a,b] \to [a_1,b_1]$

непр. $\varphi(a)=a_1$, $\varphi(b)=b_1$

$/ \lim_{b\to\beta}$

ако је $\lim_{b\to\beta}\varphi(b) = \beta_1$

$\Rightarrow \int_{a_1}^{\beta_1} f(x)\,dx = \int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ смена променљиве

Задатак. $\int_0^\pi \frac{dx}{4-3\cos x}$ сменом $t = tg\,\frac{x}{2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

обичан (Риманов)

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Границе

x	0	π
t	0	∞

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{4-3\cos x} = \int_0^{\infty} \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(4-3\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{4+4t^2-3+3t^2}$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{7t^2+1} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{(\sqrt{7}\,t)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}(\sqrt{7}\,t)\Big|_0^{\infty}$$

$\left(\text{ознака } f(x)\Big|_a^{\infty} = \lim\limits_{b\to\infty} f(b) - f(a)\right)$ $= \frac{2}{\sqrt{7}}\,\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\frac{\pi}{2}$ $\square$

КРИТЕРИЈУМИ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ

Т Нека је $\int_a^3 f(x)\,dx$ несвојств. са сингуларитетом $x=3$.

Тада он конв. ако и само ако важи

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, b_0 \in (a,3)$ тд. $\forall\, b_1, b_2 \in [b_0, 3)$ важи

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon .$$

Доказ. $\int_a^3 f(t)\,dt$ конв. $\overset{\text{деф.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \lim\limits_{x\to 3} F(x)$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

Кошијев кр. егз. лимеса $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, b_0 \in (a,3) \quad \forall\, b_1, b_2 \in [b_0, 3)$

важи $|F(b_1)-F(b_2)| < \varepsilon$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(t)\,dt\right| < \varepsilon \qquad \square$$

Поредбени критеријуми

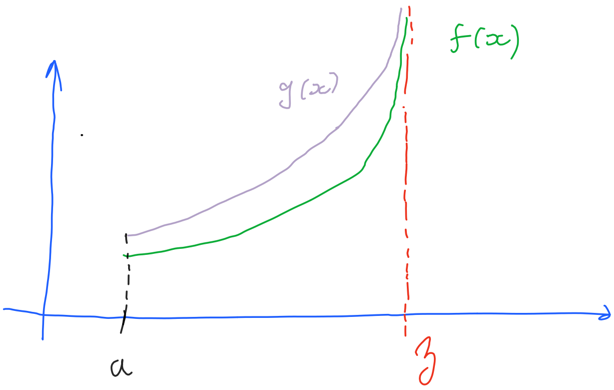
1. Поредбени критеријум

$f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x), g(x) \geq 0$ $\quad$ и $\quad f(x) \leq g(x)$

на $[a,b)$ (довољно је на неком интервалу $[b_0, b)$)

Тада, ако $\int_a^b g(x)\,dx$ конв. $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ конв.

а ако $\int_a^b f(x)\,dx$ див. $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ дивергира.



Доказ. Пошто је $f \geq 0$ $\Rightarrow$ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ растућа

$\left(F' = f, \text{ или по деф. } F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt \geq 0,\ x < y\right)$

Када $\exists \lim_{x \to b^-} F(x)$ за растућу фју?

$\Leftrightarrow$ $F(x)$ је огр. одозго.

Све исто за $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$.

Осим тога $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt = G(x)$

$\int_a^b g(t)\,dt$ конв. $\Leftrightarrow$ $G(x)$ је огр. одозго $\Rightarrow$ $F(x)$ је огр. одозго

$\Leftrightarrow$ $\int_a^b f(t)\,dt$ конв.

$\int_a^b g$ конв. $\Rightarrow$ $\int_a^b f$ конв.

$\int_a^b f$ див. $\Rightarrow$ $\int_a^b g$ див.

$\square$

2. Поредбени критеријум

$f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, $f(x), g(x) \geq 0$ (на $[b_0, b)$, $b_0 < b$)

и нека $f(x) \sim g(x)$, $x \to b^-$ $\left(\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \right)$

Тада $\int_a^b f(x)\,dx$ конв. $\Leftrightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ конв.

Доказ. $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 2$ на $[b_0, b)$

$$\frac{1}{2} g(x) \overset{(1)}{\leq} f(x) \overset{(2)}{\leq} 2 g(x) \quad \text{на } [b_0, b)$$

(2) $\Rightarrow$ $\int_{b_0}^b g(x)\,dx$ конв. $\Rightarrow$ $\int_{b_0}^b f(x)\,dx$ конв. (1. поредбени)

(1) $\Rightarrow$ $\int_{b_0}^b f(x)$ конв. $\Rightarrow$ $\int_{b_0}^b g(x)\,dx$ конв. (-||-)

Из ј. једн. синт. $\Rightarrow$ $\int_a^b$ конв. $\Leftrightarrow$ $\int_{b_0}^b$ $\square$

Задаци. Испитати конв.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$