4. час

Tuesday, 26 October 2021 16:11

VIII $\int R(x^{r_1}, \dots, x^{r_k})\,dx$

R - рационална, $r_j \in \mathbb{Q}$

(уопштење случаја VII (1))

$r_j = \frac{p_j}{q_j}$, $q := НЗС(q_1, \dots, q_k)$ $\rightsquigarrow$ смена $t^q = x$

$\Rightarrow x^{r_j} = (t^q)^{\frac{p_j}{q_j}} = t^{n_j}$ $\quad n_j \in \mathbb{Z}$

$dx = q\,t^{q-1}\,dt$ (рацион.)

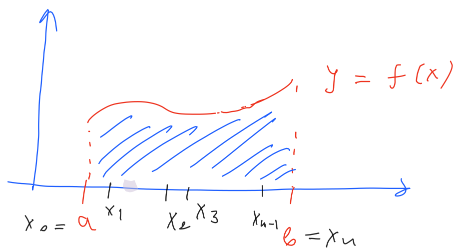
$\rightsquigarrow \int R_1(t)\,dt$, R_1 - рационална

Задатак. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt[3]{x}+1)^2}\,dx =$

$= \left\{ \begin{array}{ll} x = t^6 & \sqrt{x} = t^3, \quad \sqrt[3]{x} = t^2 \\ dx = 6t^5\,dt & \end{array} \right\} =$

$= \int \frac{t^3+1}{(t^2+1)^2}\, 6 \cdot t^5\,dt = \dots$

ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

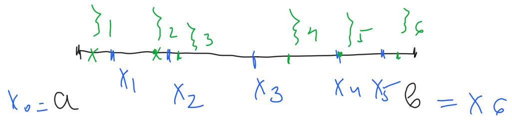


деф. Подела интервала $[a,b]$ је скуп $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

деф. Подела интервала са уоченим тачкама је $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ заједно са $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, при чему је $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$



$$\left(\delta(P) = x_4 - x_3\right) \quad x_3 - x_2\ ?$$

деф. Дијаметар поделе P (или P са ξ)

$$\delta(P) := \max\{\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ i = 1, \dots, n\}$$

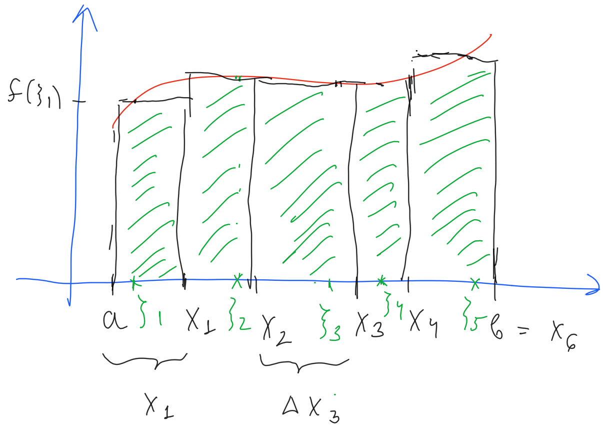
деф. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена

Интегрална сума ф-је f у односу на поделу P са уоченим тачкама ξ је

$$\sigma(f, [a,b], P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$$

$$(\Delta x_i := x_{i+1} - x_i)$$

P правоугаоника



деф. Лимес у простору подела суме $\sigma(f,[a,b],P,\xi)$, кад $\varepsilon \to 0$ је $I \in \mathbb{R}$ ако:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \text{ поделу } P \text{ са уоченим тачкама } \xi$$

важи $\delta(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f,[a,b],P,\xi) - I| < \varepsilon$

I ако постоји зовемо одређеним интегралом ф-је f на $[a,b]$ и пишемо $\int_a^b f(x)\,dx$

(или Риманов интеграл)

Ако I постоји, f се зове интеграбилна (по Риману)

<u>Напомена.</u> Ако је f интеграбилна, онда $\int_a^b f(x)\,dx$ можемо да рачунамо овако

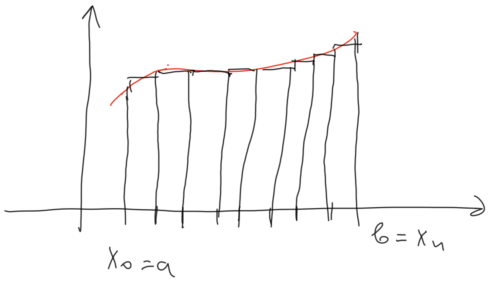
$x_0 := a$

$x_1 := a + \frac{b-a}{n}$

$x_j := a + j\,\frac{b-a}{n}$

$\vdots$

$x_n := b$



$\Rightarrow \quad \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i), \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

јер $\varepsilon > 0$ произв. $\exists \delta \quad \left|\sigma(f,[a,b],P,\xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

$\forall P,\ \operatorname{diam}(P) < \delta$

узмемо n_0, $\frac{b-a}{n_0} < \delta$

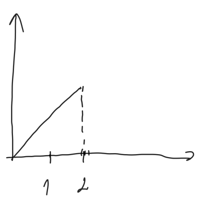
$\Rightarrow \sigma$ за ову поделу (на n једнаких делова) је баш S_n

<u>деф.</u> $\lim_{n\to\infty} S_n$ се зове и <u>Кошијев интеграл</u>

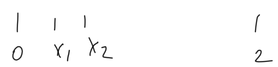
<u>Задаци.</u> Наћи, помоћу деф., Кошијев интеграл

1. $\int_0^2 x\,dx$, 2. $\int_0^1 \sin x\,dx$

(1.)



$f(x) = x$



$x_j = 0 + \frac{2-0}{n}\cdot j = \frac{2}{n}j$

$\Delta x_j = \frac{2}{n}$

$\xi_j = x_j$ (десни крај)

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\underset{\underset{\frac{2}{n}}{\parallel}}{\Delta x_j} = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{2}{n}j\right) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{2}{n}j = \frac{4}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j$$

$$= \frac{4}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

$$\Rightarrow \int_0^2 x\,dx = 2$$

(2.) $[a,b]=[0,1]$ $\quad x_j = \frac{j}{n}$ $\quad \left(x_j = \underset{\underset{0}{\parallel}}{a} + j\cdot\frac{\overset{\overset{1}{\parallel}}{b}-\overset{\overset{0}{\parallel}}{a}}{n}\right)$

$\xi_j = x_j$

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sin\frac{j}{n} \quad =?$$

ТРИК

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{1}{\sin\alpha/2}\Big(\underbrace{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}_{1.} + \underbrace{\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha}_{2.} + \ldots + \sin\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha\Big)$$

$$\left(\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\Big\{\underbrace{\cos\frac{\alpha}{2} - \cancel{\cos\frac{3\alpha}{2}}}_{1.} + \underbrace{\cancel{\cos\frac{3\alpha}{2}} - \cancel{\cos\frac{5\alpha}{2}}}_{2.} + \cancel{\cos\frac{5\alpha}{2}} - \cancel{\cos\frac{7\alpha}{2}} + \ldots + \cancel{\cos\frac{2n-1}{2}\alpha} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha\Big\}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)$$

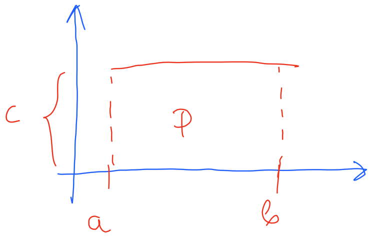
Кog нас је $\alpha = 1/n$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2n}}\left(\cos\frac{1}{2n} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}\Big(\underbrace{\cos\frac{1}{2n}}_{\to \cos 0 = 1} - \underbrace{\cos\left(1+\frac{1}{2n}\right)}_{\to \cos 1}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 1-\cos 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sin x\,dx = 1-\cos 1 \qquad \square$$

Пример. $f \equiv c$ $(= const)$. $\int_a^b f(x)\,dx = ?$



P, ξ било подела са уоченим тачкама ξ

$$\sigma(f, [a,b], P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c \cdot \Delta x_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

$$= c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \dots + x_1 - x_0)$$

$$= c(x_n - x_0) = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b c\,dx = c \cdot (b-a) \qquad \square$$

Теорема. Свака непрекидна ф-ја је интеграбилна.

Такође, свака ограничена ф-ја која има коначно много тачака прекида је интеграбилна.

Такође, ако је f огр. и монотона на $[a,b]$ $\Rightarrow$ f је интеграбилна.

(f је интеграбилна $\Leftrightarrow$ скуп тачака прекида „мали"

мере = дужине НУЛА)

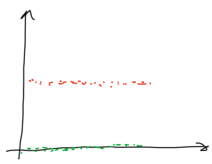
Пример ф-је која није интеграбилна

$[a,b]$ било шта, нпр. $[0,1]$

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{(Дирихлеова ф-ја)}$$

има прекид у свакој тачки

(доказати, ако није лако)



Нека је $\underline{\delta > 0}$ дато узете и $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$\delta(\mathcal{P}) < \delta$

ако $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}$ (густина $\mathbb{Q}$)

$$\Rightarrow \sigma(f, [0,1], \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{=1} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1$$

$\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \setminus \mathbb{Q}$ (густина $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

$$\Rightarrow \sigma(f, [0,1], \mathcal{P}, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \overset{=0}{f(\eta_i)} \Delta x_i = 0$$

пошто је δ произвољно мало $\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ не постоји. $\square$

Својства одређеног интеграла

Нека су f и g интеграбилне на $[a,b]$, $[b,c]$, $[a,c]$

1. $$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$ ЛИНЕАРНОСТ

Δ: $S_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$, $S_n(f) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

$$S_n(\lambda f + \mu g) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} [\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)] =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \lambda \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) + \frac{b-a}{n} \cdot \mu \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)$$

$$= \lambda S_n(f) + \mu S_n(g) \quad \Big/ \lim_{n\to\infty}$$

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx \quad \square$$

2. $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

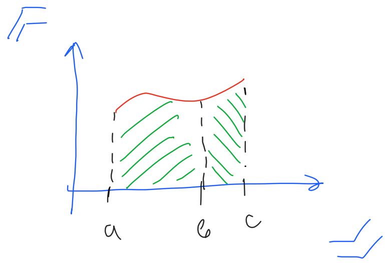
МОНОТОНОСТ

Δ: $S_\pi(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \le \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) = S_n(g) \quad \Big/ \lim_{n\to\infty}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \qquad \square$$

3. $a < b < c \Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

АДИТИВНОСТ ПО СКУПУ



Δ: $\varepsilon > 0$ произвољно

$I_1 := \int_a^c f(x)\,dx, \quad I_2 := \int_a^b f(x)\,dx, \quad I_3 = \int_b^c f(x)\,dx$

доказаћемо $|I_1 - (I_2 + I_3)| < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon \Rightarrow I_1 - (I_2 + I_3) = 0)$

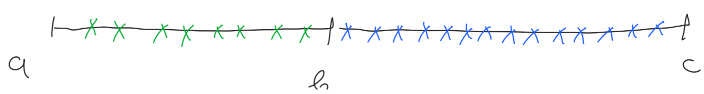
$\delta > 0$ т.д. ако је $\delta(P_1) < \delta \Rightarrow |I_1 - \sigma(f, [a,c], P_1, \xi)| < \varepsilon/3$

$\delta(P_2) < \delta \Rightarrow |I_2 - \sigma(f, [a,b], P_2, \eta)| < \varepsilon/3$

$\delta(P_3) < \delta \Rightarrow |I_3 - \sigma(f, [b,c], P_3, \zeta)| < \varepsilon/3$

узмемо P_2 и P_3 како горе, $P_1 := P_2 \cup P_3 \Rightarrow \delta(P_1) < \delta$

$\xi := \eta \cup \zeta$



$$\underset{\text{близу } I_1}{\sigma(f,[a,c],\mathcal{P}_1,\xi)} = \overset{\text{близу } I_2}{\sigma(f,[a,b],\mathcal{P}_2,\eta)} + \overset{\text{близу } I_3}{\sigma(f,[b,c],\mathcal{P}_3,\zeta)}$$

$$\sigma(f,[a,b],\mathcal{P}_2,\eta) = \sum f(\eta_i)\Delta x_i \qquad \sigma(f,[b,c],\mathcal{P}_3,\zeta) = \sum f(\zeta_i)\Delta x_i$$

$$\Downarrow$$

$$|I_1 - (I_2+I_3)| = |I_1 \underbrace{- \sigma(f,[a,c],\mathcal{P}_1,\xi) + \sigma(f,[a,b],\mathcal{P}_2,\eta) + \sigma(f,[b,c],\mathcal{P}_3,\zeta)}_{=0} - I_2 - I_3|$$

$$\le |I_1 - \sigma(f,[a,c],\mathcal{P}_1,\xi)| + |\sigma(f,[a,b],\mathcal{P}_2,\eta) - I_2| + |\sigma(f,[b,c],\mathcal{P}_3,\zeta) - I_3|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$\square$

деф. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx := 0$

$a < b \Rightarrow \displaystyle\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

(јер хоћемо $\displaystyle\int_a^b + \int_b^a = \int_a^a = 0$)

НАПОМЕНА: Увек важи $\boxed{\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx}$ (*)

без обзира на поредак $a, b, c \in \mathbb{R}$

Нпр. $a < c < b$, знамо $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

домаћи: доказати (*) за: $a > b > c$, $a > c > b$, $a = c < b$

4. (Неједнакост Δ за интеграле, основна нејед. за интеграле)

$a < b \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ (ако су и f и $|f|$ интегр.)

Д: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,[a,b])\right| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| \le \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)| = \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad \square$$

Неједн. Δ за коначну суму

Њутн-Лајбницова (веза између одр. и неодређеног $\int$)

Т Нека је f класе C^1 на $[a,b]$ ($\Leftrightarrow$ f' је непрекидна). Тада је $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$.

Д: $f(b)-f(a) = \sum_{j=1}^{n}\big(f(x_j)-f(x_{j-1})\big) = \sum_{j=1}^{n} f'(\xi_j)\,\Delta x_j =$

Лагр. т. о ср. вр. $\big(f(\beta)-f(\alpha) = f'(\xi)(\beta-\alpha)\big)$

$x_j = a + j\cdot\frac{b-a}{n}$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f'(\xi_j) = S_n(f') \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f'(x)\,dx$$

$\square$

Нотација. $f(x)\Big|_a^b := f(b)-f(a)$

Задаци. $\int_0^2 x\,dx$, $\int_0^1 \sin x\,dx$

$$\int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2$$

$$\int_0^1 \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^1 = -\cos 1 + \cos 0 = 1-\cos 1 \qquad \square$$

Теорема о средњој вредности

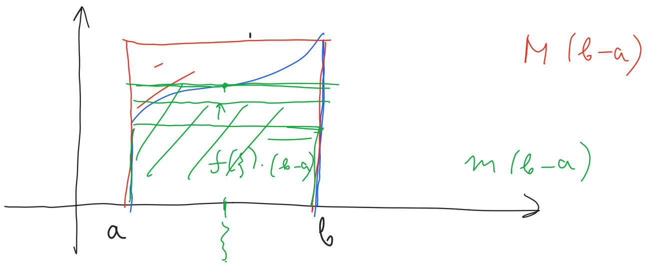
Нека је f интеграбилна на $[a,b]$ и $m \le f(x) \le M$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \qquad (1)$$

Специјално, ако је f непрекидна, тада $\exists \xi \in [a,b]$ тд.:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \qquad (2).$$

Δ:



$$m \le f(x) \le M \quad \Big/ \int_a^b \qquad \text{монотоност}$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a) \qquad (1)$$

За (2), из непрекидн.: $m = \min f = f(x_1)$ f непр. (достиже се)

$M = \max f = f(x_2)$ —||—

из (1) $\quad m = f(x_1) \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{ово је међувредност}} \le f(x_2) = M$

$\Downarrow$ Коши − Болцано

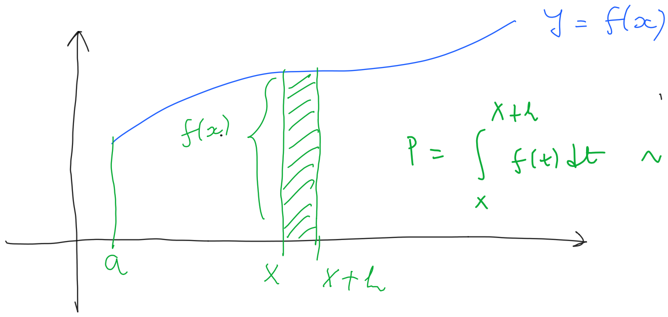
$$\exists \xi \in [a,b] \Rightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \qquad \square$$

ОСНОВНА ТЕОРЕМА ИНТЕГРАЛНОГ РАЧУНА

Нека је f непр. на $[a,b]$, $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

Тада је $F'(x) = f(x)$.

Δ:



$P = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \sim h \cdot f(\xi)$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} =$$

Т. о ср. вр. за интеграле

$$= \frac{h \cdot f(\xi_h)}{h} = f(\xi_h) \xrightarrow[\text{непрек.}]{h\to 0} f(x)$$

$$\xi_h \in [x, x+h] \Rightarrow \xi_h \xrightarrow{h\to 0} x$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$$

□