13. час

Tuesday, 28 December 2021 16:27

(2) $\Rightarrow$ (3) Пп. $u=\sum_{i=1}^{\infty}\langle u,e_i\rangle e_i$ хоћемо: $\|u\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\langle u,e_i\rangle^2$

$$\|u\|^2=\langle u,u\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{\infty}\langle u,e_i\rangle e_i,\ \sum_{j=1}^{\infty}\langle u,e_j\rangle e_j\right\rangle=$$

$$\left\langle \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\langle u,e_i\rangle e_i,\ \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\langle u,e_j\rangle e_j\right\rangle \overset{T2}{\underset{\text{непр. }\langle\cdot,\cdot\rangle}{=}} \lim_{N\to\infty}\left\langle \sum_{i=1}^{N}\langle u,e_i\rangle e_i,\sum_{j=1}^{N}\langle u,e_j\rangle e_j\right\rangle$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\langle u,e_i\rangle\langle u,e_j\rangle\underbrace{\langle e_i,e_j\rangle}_{\delta_i^j}=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\langle u,e_i\rangle\langle u,e_i\rangle$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\langle u,e_i\rangle^2=\sum_{i=1}^{\infty}\langle u,e_i\rangle^2$$

(3) $\Rightarrow$ (1) Пп. да важи Парсевалова јдн.

$u\in X$ $\varepsilon>0$ хоћемо $n\in\mathbb{N}$, λ_i $i=1,\dots,n$ $\|u-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\|<\varepsilon$

Доказаћемо да ово важи за $\lambda_i=\alpha_i=\langle u,e_i\rangle$

$$\|u-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|^2 \overset{\text{Последица 1}}{=} \|u\|^2-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=\|u\|^2-\sum_{i=1}^{n}\langle u,e_i\rangle^2\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$<\varepsilon^2,\ \forall n\geq n_0$

јер $\|u\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\langle u,e_i\rangle^2$

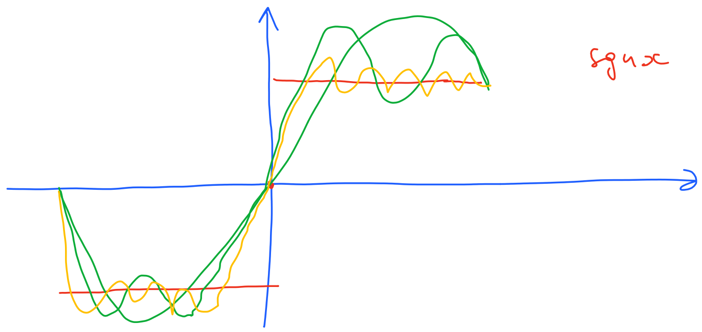
$\square$

T Тригонометријски ОНС $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$ $n\in\mathbb{N}$ је потпун ($\Leftrightarrow$ база $\Leftrightarrow$ важи Парсевалове једнакости) у $C_0[-\pi,\pi]$.

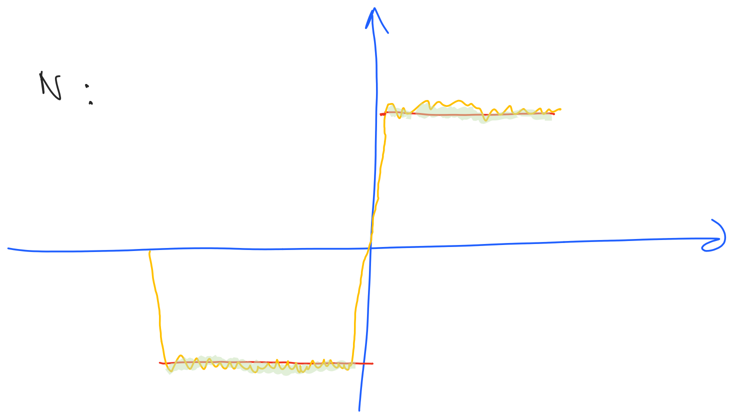
Без доказа.

Шта ово значи? $S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$$\|f(x)-S_N(x)\|\xrightarrow{N\to\infty}0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_N(x))^2\,dx\xrightarrow{N\to\infty}0$$



За велико N:



Терминологија: Оваква конвергенција се зове и конвергенција у СРЕДЊЕМ или L^2-конвергенција или конвергенција у L^2-норми

НАПОМЕНА: Знамо већ три врсте конвергенција ф-алног низа (реда):

- тачка-по-тачка
- равномерна
- у средњем

Како гласи Парсевалова једнакост? $\|f\|^2 = \hat{a}_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2)$

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\tilde{a}_0, \quad a_n = \frac{\tilde{a}_n}{\sqrt{\pi}}, \quad b_n = \frac{\tilde{b}_n}{\sqrt{\pi}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\pi a_n^2 + \pi b_n^2)$$

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx}$$ Парсевалова једнакост

$$f(x)\sim \boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)} = f^*$$ Фуријеов ред

$$\boxed{\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n\in\mathbb{N}_0\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad n\in\mathbb{N}\end{aligned}\right\}\ \text{Фуријеови коеф.}}$$

НАПОМЕНА: Ако је f парна $\Rightarrow b_n=0$ (развој по косинусима)

Ако је f непарна $\Rightarrow a_n=0$ (—||— синусима)

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nx\,dx}_{\substack{\text{непарно}\\ \text{ако је } f\\ \text{парна}}}=0 \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nx\,dx}_{\substack{\text{непарно, ако је}\\ f \text{ непарна.}}}$$

Задаци: Развити $f(x)=|x|$ на $[-\pi,\pi]$ у Фуријеов ред и наћи

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

f парна $\Rightarrow b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\cancel{2}}{\pi}\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_{x=0}^{\pi}=\pi$$

$$n\geq 1: \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)\,dx=\left\{\begin{aligned} x&=u\\ \cos(nx)\,dx&=dv\\ du&=dx\\ v&=\frac{1}{n}\sin nx\end{aligned}\right.$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{x=0}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right\}=$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \frac{-\cos nx}{n} \Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi} \left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-4}{(2k+1)^2\pi}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Фуријеов ред ф-је f је $\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2\pi} \cos(2k+1)x$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ Парсевалова: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

//

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{(2n+1)^4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^4}{96}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ – ТРИК:

ЗНАМ ИЗРАЗИМ ПРЕКО S

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4}$$

$$S = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} S \Rightarrow \frac{15}{16} S = \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow S = \frac{\pi^4}{90}$$

Конвергенција Фуријеовог тригонометријског реда тачка-по-тачка (обичне конвергенција)

деф. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ је део-по-део непрекидна ако је непрекидна на $[a,b] \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, а граници у $x = x_j$ су праве врсте.

$f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ (апсолутно интеграбилна, главни пример део-по-део непр.)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ - неп. ф-ја}$$

Да ли, и за које $x \in [-\pi, \pi]$, $S_N(x) \to f(x)$, $N \to \infty$?

(ово питање има смисла и без неке апстрактне приче о пред-Хилбертовим просторима)

Т (Дини). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-периодична, апсолутно интеграбилна на $[-\pi, \pi]$. Ако, за $x \in \mathbb{R}$ важи

(1) $\exists f(x^+)$ и $f(x^-) \in \mathbb{R}$

(2) $\exists \varepsilon > 0$ т.д. $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u) - f(x^+)}{u}\, du$ и $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x-u) - f(x^-)}{u}\, du$

конвергирају,

онда $S_N(x)$ конв. и $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Без доказа.

Деф. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ је део-по-део глатка (део-по-део класе C^1) ако f има непрекидан извод на $[a, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_n, b]$ а у x_k $\exists f'(x_k^+) = \lim_{t \to x_k^+} f'(t)$ и $f'(x_k^-) \in \mathbb{R}$.

Примери: $\underset{f(x)}{\overset{\|}{\operatorname{sgn} x}}$, $\underset{g(x)}{\overset{\|}{|x|}}$ су део-по-део глатке.

$f'(0^+) = f'(0^-) = 0$

$g'(0^+) = 1$, $g'(0^-) = -1$.

Напомене: f део-по-део глатка $\Rightarrow$ f део-по-део непрекидна.

Последице: f 2π периодична, и део-по-део глатка на $[-\pi, \pi]$.

Тада $\forall x \in \mathbb{R}$ $S_N(x)$ конв. ка $\frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$.

Доказ. из Динијевог услова: (1) важи јер $\exists f'(x^+) \Rightarrow \exists f(x^+)$

(2) важи јер $\dfrac{f(x+h) - f(x^+)}{h}$ може да се непрекидно продужи за $h=0$

јер: из Лагранжеве теореме $\dfrac{f(x+h) - f(x^+)}{h} = \dfrac{f'(\xi_x) \cdot h}{h} = f'(\xi_x)$

$\xi_x \in (x, x+h)$

$h \to 0 \Rightarrow \xi_x \to x$ и $\exists \lim\limits_{\xi_x \to x} f'(\xi_x) \Rightarrow \int$ конвергира.

па, за довољно мало ε, ф-ја $h \mapsto \dfrac{f(x+h) - f(x^+)}{h}$ је непр. на $[0, \varepsilon]$ □

Т (Липшицова) f 2π-периодична, апс. интеграбилна на $[-\pi, \pi]$ и непрекидна у тачки x. Ако $\exists L > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $\delta > 0$ тдј.

$$|f(x+h) - f(x)| \le L|h|^\alpha \quad \forall h \in (-\delta, \delta)$$

Хелдеров услов

тада $S_N(x) \longrightarrow f(x)$.

Доказ. Важе услови Динија: (1) $\exists f(x^-) = f(x^+) = f(x)$ јер је f непр. у x

(2) $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}\, dx$ конв. ?

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h} \right| = \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \le \frac{L|h|^\alpha}{h} = L\, h^{\alpha - 1}$$

$\alpha - 1 > -1$

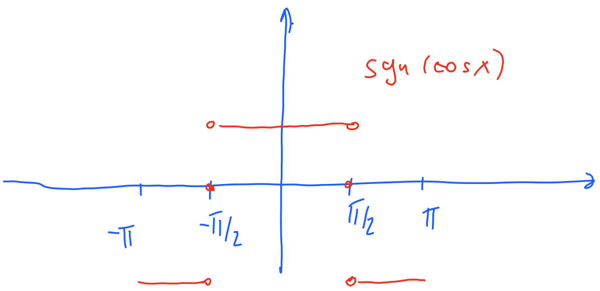
$\displaystyle\int_0^\varepsilon L h^{\alpha-1} dh$ конв.

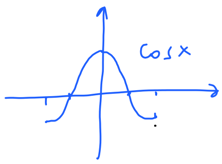
$$\Rightarrow \int_0^\varepsilon \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}\, dx \text{ конвергира}$$

$\Rightarrow S_N(x) \xrightarrow{N \to \infty} \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right) = f(x)$ јер је f непр. у x □

Задаци.

1. Развити $f(x)=\operatorname{sgn}\cos x$ на $[-\pi,\pi]$, и наћи суму Ф. реда за оне $x\in\mathbb{R}$ за које тај конвергира. Наћи $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.





$f\in C_0([-\pi,\pi])$ + део-по-део глатка + апс. интегр.

Парна $\Rightarrow$ $b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}1\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-1)\,dx\right)=0$$

$n\geq 1$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\,dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{x=0}^{\pi/2}-\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{x=\pi/2}^{\pi}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\underbrace{\sin 0}_{=0}-\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}+\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\qquad \sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k\\ \sin\frac{2k+1}{2}\pi, & n=2k+1\end{cases}$$

$$\sin\frac{2k+1}{2}\pi=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k$$

Фуријеов ред: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi}\cos(2k+1)x=f^*(x)$

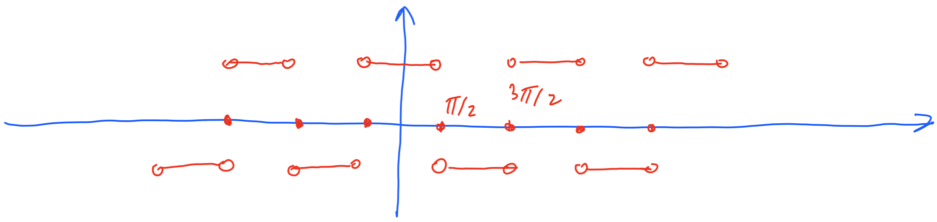
Овај ред у свакој тачки конв. на основу последице Дирихлеове теореме.

(f апс. инт. и део-по-део глатка)

f проширимо 2π-периодично на $\mathbb{R}$, $\tilde{f}$ је то проширење

како је $\cos x$ 2π-периодична, $\tilde{f}(x) = \operatorname{sgn}(\cos x) \in C_0([-\pi,\pi])$

$\left(f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right) \right)$



$$\Rightarrow \quad f^*(x) = \tilde{f}(x) = \operatorname{sgn}(\cos x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)} \cos(2n+1)x$$

Заменом $x = 0$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \underbrace{\cos 0}_{1} = \operatorname{sgn}(\cos 0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, Парсевал: $\frac{a_0^2}{2} + \sum (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$

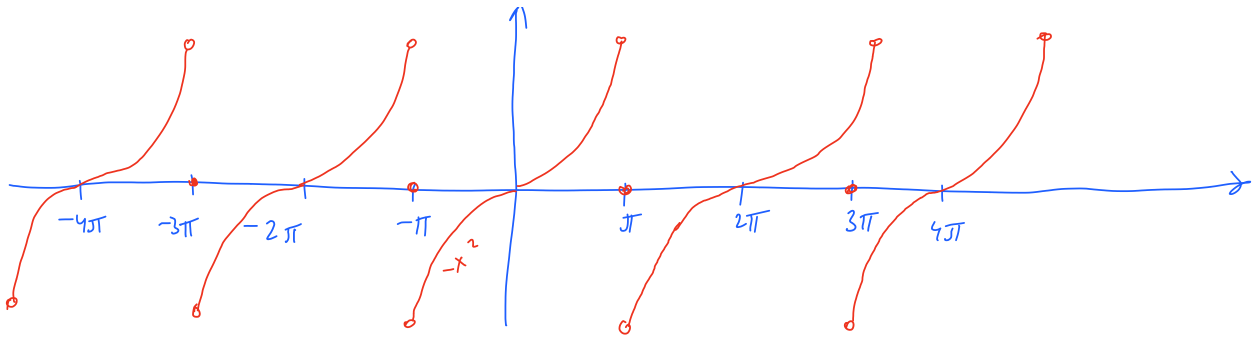
код нас: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2n+1)^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1\,dx = 2$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{2\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3S}{4} = \frac{\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. Развити $f(x) = x^2$ у синусни ред на $[0, \pi)$ и наћи суму добијеног реда за $\forall x$ за које тај ред конвергира.



1) развијамо у синусе $\Rightarrow$ $\hat{f}$ је непарна на $(-\pi, \pi)$

2) продужимо по периодичности

3) $\tilde{f}((2k+1)\pi) := 0$, $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

из последице Дирихлеове теореме $\Rightarrow$ $\tilde{f}(x) = f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

$a_n = 0$ $n \in \mathbb{N}_0$ јер је f непарна

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin(nx)}_{\text{парна}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = u \\ \sin(nx)\,dx = dv \\ 2x\,dx = du \\ -\frac{\cos(nx)}{n} = v \end{array} \right.$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ -\frac{x^2\cos(nx)}{n}\Big|_{x=0}^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x = u \\ \cos(nx) = dv \\ du = dx \\ \frac{\sin(nx)}{n} = v \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ -\frac{\pi^2\cos(n\pi)}{n} + \frac{2}{n}\left[\cancel{\frac{x\sin(nx)}{n}}\Big|_{x=0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx \right] \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2}\,\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{x=0}^{\pi} \right\} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right) \right]$$

у задацима:
- нађимо a_n, b_n
- продужимо f 2π-пер. на $\mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(f^+(x) + f^-(x)\right)$ (додефинишемо) $\longrightarrow$ $\tilde{f}$ = Ф. ред
- конкретан ред (број): или заменимо конкретно x или Парсевалова једнакост.

НАПОМЕНА. Ако $f : [-c, c] \to \mathbb{R}$ апс. интеграбилна, онда је њен Фуријеов ред дат са

~

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \quad , \text{ где су}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Све теореме о конв. тачка-по-тачка важе, f треба да буде $2l$-периодична.

Парсевалова једнакост: $\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.